

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 5 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 193—240

## Algebra und Zahlentheorie.

● **Abramescu, N.:** Elementare Vorlesungen über höhere Algebra. (Bibl. „Gaz. Mat.“ Nr. 3.) București: F. Göbl Fii 1935. VIII, 180 S. u. 48 Fig. [Rumänisch].

**Orts, J. M.<sup>a</sup>:** Über den Fundamentalsatz der Algebra. An. Asoc. españ. Progr. Ci. 1, 733—736 (1934) [Spanisch].

**Wegner, Udo:** Über trinomische Gleichungen von Primzahlgrad. Math. Ann. 111, 734—737 (1935).

Eine ganzzahlige, rational irreduzible trinomische Gleichung

$$x^p + ax + b = 0 \quad (1)$$

vom Primzahlgrade  $p$  hat unter den Voraussetzungen

$$(a, b) = 1; (a, p) = 1; (b, p - 1) = 1$$

die symmetrische Gruppe. Zum Beweis wird nachgewiesen, daß jede in der Körperdiskriminante des durch eine Wurzel  $\vartheta$  von (1) erzeugten Körpers  $P(\vartheta)$  aufgehende Primzahl  $q$  in diesem Körper eine Zerlegung

$$(q) = \mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \dots \mathfrak{p}_s$$

besitzt, wobei  $\mathfrak{p}_1$  den Grad Eins hat.

van der Waerden (Leipzig).

**Wegner, Udo:** Zur Theorie der affektlosen Gleichungen. Math. Ann. 111, 738 bis 742 (1935).

Alle ganzzahligen rational irreduziblen Gleichungen der Form

$$x^n + ap^t x^2 + bp^{t+u} = 0$$

von ungeradem Grad  $n$  haben die symmetrische Gruppe, vorausgesetzt daß  $p$  eine zu  $ab$  fremde Primzahl  $> n$  und  $u$  eine ungerade Zahl, weiter

$$(t, n - 2) = 1 \quad \text{und} \quad t + u < \frac{nu}{2}$$

ist. Zum Beweis wird nachgewiesen, daß die Primzahl  $p$  im Körper  $P(\vartheta)$  die Zerlegung  $(p) = \mathfrak{p}_2^{n-2} \mathfrak{p}_2^2$  besitzt.

van der Waerden (Leipzig).

**Carlitz, Leonard:** On the representation of a polynomial in a galois field as the sum of an odd number of squares. Duke math. J. 1, 298—315 (1935).

Die Anzahl der Darstellungen eines Polynoms  $L = L(x)$  vom Grade  $l \leq 2k$  über einem  $GF(q)$  als Summe einer ungeraden Anzahl von Quadraten

$$L = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \dots + \alpha_{2s+1} X_{2s+1}^2$$

wird bestimmt. Dabei sind die  $\alpha_v$  gegebene Elemente des  $GF$ , deren Summe gleich dem Koeffizienten von  $x^{2k}$  in  $L$  ist, während die  $X_v$  primäre Polynome vom Grade  $k$ , d. h. Polynome mit Anfangskoeff. 1 sind. Die Formeln sind wesentlich komplizierter als im Fall einer geraden Anzahl von Quadraten [vgl. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 397 (1933); dies. Zbl. 6, 389]. Sie enthalten die „Artinschen Zahlen“

$$\sigma_j(\Delta) = \sum_{\text{Grad } G=j} \left( \frac{\Delta}{G} \right). \quad \text{van der Waerden (Leipzig).}$$

**Hua, Loo-keng:** A proof of Hadamard's theorem. Tôhoku Math. J. 41, 247 bis 248 (1935).

**Schwerdtfeger, Hans:** Sur les fonctions de matrices. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 414—416 (1935).

Let  $f(z)$  be a multiple-valued analytic function of the complex variable  $z$ ,  $A$  a matrix with complex elements, and  $G$  the group of non-singular matrices commutative

with  $A$ . Let  $f_1(A)$  be one determination of  $f(z)$  at  $z = A$ . The distinct matrices  $T^{-1}f_1(A)T$  where  $T$  ranges over  $G$  form a class of values of  $f(A)$ . All matrices of a class can be calculated from any one by purely algebraic operations.

MacDuffee (Madison).

**Burington, Richard Stevens:** On the equivalence of quadrics in  $m$ -affine  $n$ -space and its relation to the equivalence of  $2m$ -pole networks. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 163—176 (1935).

The paper considers the equivalence of quadratic forms under the  $m$ -affine transformations

$$x_i = x'_i, \quad x_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} x'_k \quad (i = 1, \dots, m; j = m+1, \dots, n).$$

Let  $A$  be the matrix of the form, and  $A_{r_1 \dots r_s}$  the principal minor matrix obtained by suppressing rows and columns numbered  $r_1, \dots, r_s$  the  $r_i$  being distinct and  $\leq m$ . The ranks  $\varrho_{r_1 \dots r_s}$ , signatures  $\sigma_{r_1 \dots r_s}$  and determinants  $d(A_{r_1 \dots r_s})$  are invariant. Let  $\nu = \varrho_{1 \dots m-1} - \varrho_{1 \dots m}$ . The canonical forms

$$a_{mm} x_m^2 + \sum_{j=m+1}^n \delta_j x_j^2, \quad 2x_1 x_n + \sum_{j=m+1}^n \delta_j x_j^2$$

are obtained according as  $\nu \neq 2$  or  $\nu = 2$ . Here  $a_{mm}$  is a parameter, and the  $\delta_j$  are  $\pm 1$  for the real field,  $+1$  for the complex field. The case  $m = 2$  is given in detail. The principal application is to the  $2m$ -pole equivalence problem in the theory of linear networks of  $n$  meshes. Then  $A = (R_{ij} + L_{ij}\lambda + D_{ij}\lambda^{-1})$ , the  $R_{ij}, L_{ij}, D_{ij}$  being circuit parameters (resistance, inductance, elastance) and  $\lambda$  the imaginary frequency parameter. For passive networks the forms are positive definite. In this paper a mathematical groundwork is laid for the study of non-passive circuits also.

MacDuffee (Madison).

**Mori, Shinziro:** Über primäre Ringe. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 131—139 (1935).

Der kommutative Ring  $\mathfrak{R}$  heißt hier primär, wenn in ihm jedes Ideal primär ist und folgendes Lemma von Krull gilt: Wenn  $S \subset \mathfrak{R}$  ein multiplikativ abgeschlossenes System ohne Elemente aus dem Ideal  $\mathfrak{a}$  ist, so gibt es stets einen Primidealteiler  $\mathfrak{p}$  von  $\mathfrak{a}$ , der zu  $S$  elementfremd ist und die Eigenschaft hat, daß in jedem echten Teiler von  $\mathfrak{p}$  mindestens ein Element von  $S$  vorkommt. Verf. zeigt:  $\mathfrak{R}$  ist entweder ein Ring ohne echtes Primideal oder ein Ring mit Einheitselement und einem einzigen echten maximalen Primideal. Weiter wird der durch  $\mathfrak{R}$  bestimmte Quotientenring  $\mathfrak{R}$  untersucht und für den Fall, daß  $\mathfrak{R}$  ein Körper ist, auch der zu  $\mathfrak{R}$  gehörige ganz abgeschlossene Ring  $\mathfrak{Q}$ . In  $\mathfrak{Q}$  ist jedes echte Primideal maximal, und jedes Ideal ist als Durchschnitt endlich oder unendlich vieler Primär Ideale darstellbar. Gilt in  $\mathfrak{R}$  überdies der eingeschränkte Vielfachenkettensatz, so gilt er auch in  $\mathfrak{Q}$ . Ist noch in  $\mathfrak{R}$  das Einheitselement vorhanden, so läßt sich jedes Ideal aus  $\mathfrak{Q}$  als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

**Nakayama, Tadasi:** Über das direkte Produkt zweier einfachen Algebren mit zueinander teilerfremden  $p$ -Indizes. Jap. J. Math. 12, 27—36 (1935).

$K$  sei ein endlicher algebraischer Zahlkörper,  $\mathfrak{o}$  seine Hauptordnung,  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{I}$  seien zwei normale einfache Algebren über  $K$ ,  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  sei eine Maximalordnung von  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$  eine von  $\mathfrak{I}$ . Es wird nach den Maximalordnungen  $\mathfrak{D}$  des direkten Produktes  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$  gefragt, die  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$  umfassen.  $\mathfrak{p}$  sei ein Primideal von  $K$  und  $\mu_{\mathfrak{p}}$  der  $\mathfrak{p}$ -Index von  $\mathfrak{S}$ ,  $\nu_{\mathfrak{p}}$  der von  $\mathfrak{I}$ . Es gibt dann mindestens  $\prod_{\mathfrak{p}} (\mu_{\mathfrak{p}}, \nu_{\mathfrak{p}})$  Maximalordnungen von  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$ , die  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$  enthalten. Im Falle  $\prod_{\mathfrak{p}} (\mu_{\mathfrak{p}}, \nu_{\mathfrak{p}}) = 1$  gibt es auch nur eine solche Maximal-

ordnung  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$ . Zum Beweis wird die entsprechende Behauptung für die  $\mathfrak{p}$ -adischen Erweiterungen  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$  bewiesen, der Übergang ins „Große“ ist dann leicht zu vollziehen. In einer Max. Ord.  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$  werden „ $A$ -Rechtsideale“ betrachtet,



das sind solche, deren Linksordnungen ebenfalls  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  und  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  umfassen. Die Norm ( $=$  Restklassenzahl) eines minimalen  $A$ -Rechtsideals  $\mathfrak{A}_0$  wird  $N\mathfrak{A}_0 = N_K(\mathfrak{p})^{f^2 g^2 / (\mu_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}})}$ , wo  $f^2 = (\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}})$ ,  $g^2 = (\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}})$ . Geht man von irgendeinem  $\mathfrak{D}_1$  aus, nimmt darin ein minimales  $A$ -Rechtsideal  $\mathfrak{A}_1$ , in dessen Linksordnung ein minimales Rechtsideal  $\mathfrak{A}_2$  usw., so sind die ersten  $(\mu_{\mathfrak{p}}, \nu_{\mathfrak{p}})$  Max.Ord.  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \dots$  voneinander verschieden, was durch Vergleich der  $N\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_{k-1} \dots \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$  (eigentliches Produkt!) mit der Norm eines zweiseitigen Ideals sich ergibt. Im Falle  $\prod (\mu_{\mathfrak{p}}, \nu_{\mathfrak{p}}) = 1$  gibt es genau eine Max.Ord.  $\mathfrak{D} = E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$ , die  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$  umfaßt. Jede Max.Ord.  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$  entsteht auf diese Weise aus den Max.Ord.  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{D} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$ .  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$  und  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$  sind dann und nur dann vom gleichen Typus, wenn es  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$  bzw.  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$  sind.  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}}$  seien Ideale von  $\mathfrak{S}$  bzw.  $\mathfrak{I}$ ,  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}^{(1)}$  bzw.  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}^{(1)}$  seien ihre Linksordnungen,  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}^{(2)}$  bzw.  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}^{(2)}$  ihre Rechtsordnungen. Dann ist  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}^{(1)}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}^{(1)}) \mathfrak{a}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}} E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}^{(2)}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}^{(2)}) = E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}})$  ein Ideal von  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$  mit der Rechts.Ord.  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$  und der Links.Ord.  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$ .  $E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}})$  ist ganz (gleichseitig), wenn es  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{I}}$  sind.  $E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}}) E(\mathfrak{b}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{I}}) = E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{I}})$ . Dies Produkt ist dann und nur dann eigentlich, wenn es  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{S}}$  und  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{I}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{I}}$  sind. Ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in  $K$ ,  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{S}}$  der zweiseitige Primteiler von  $\mathfrak{p}$  in  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$ ,  $\mathfrak{p}_{\mathfrak{I}}$  der in  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}$ ,  $\mathfrak{P}$  der in  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$ , so wird  $E(\mathfrak{p}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}}) = \mathfrak{P}^{\nu_{\mathfrak{p}}}$ ,  $E(\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{p}_{\mathfrak{I}}) = \mathfrak{P}^{\mu_{\mathfrak{p}}}$ . Jedes gleichseitige Ideal von  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$  hat die Form  $E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}})$ , aber nicht jedes ungleichseitige: Für ein ganzes unzerlegbares  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}$  ist  $E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{I}})$  Produkt von  $g$  unzerlegbaren Faktoren in  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$ . Es gilt die Normenrelation  $N_{\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}}(E(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{I}})) = N_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{S}})^{g^2} N_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{I}})^{f^2}$ .

Max Deuring (Leipzig).

**Chevalley, Claude:** Sur la théorie du corps de classes. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 632—634 (1935).

Die Note ist die Voranzeige einer anderwärts erscheinenden Arbeit, deren Hauptergebnis der Nachweis ist, daß die ganze Klassenkörpertheorie rein arithmetisch ohne Benutzung analytischer (Dirichletscher) Methoden aufgebaut werden kann; dieser Nachweis wurde vom Verf. in seiner thèse: Sur la théorie du corps de classes etc., J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **2**, 365—476 (1933); dies. Zbl. **8**, 53, und in der gemeinsam mit H. Nehr Korn geschriebenen Arbeit: Sur les démonstrations arithmétiques dans la théorie du corps de classes, Math. Ann. **111**, 364—371 (1935); dies. Zbl. **12**, 7, angestrebt. — Es handelt sich darum, daß die einem zyklischen Zahlkörper  $Z/k$  vom Primzahlgrad  $p$  zugeordnete Idealgruppe  $\alpha N_{Z/k} \mathfrak{A}$  in  $k - \alpha$  der Strahl modulo einem Multiplum  $m$  des Führers von  $Z/k$ ,  $\mathfrak{A}$  die Gruppe der zu  $m$  primen Ideale von  $Z$  — genau den Index  $p$  hat. Bisher konnte arithmetisch nur  $(\alpha : \alpha N_{Z/k} \mathfrak{A}) \equiv 0 \pmod{p}$  gezeigt werden. Obere Abschätzungen für Indizes von zugeordneten Idealgruppen geben aber die beim Beweis des Existenzsatzes für Klassenkörper nach Herbrand-Chevalley auftretenden Formeln, was schon in der zweiten der zitierten Arbeiten benutzt worden ist. Man kann auf diese Weise für einen gewissen abelschen Erweiterungskörper  $Z_m$  eines gegebenen zyklischen Körpers  $Z$  vom Grade  $p$  über einem die  $p$ -ten Einheitswurzeln enthaltenden Grundkörper  $k$  die Relation  $(\alpha : \alpha N_{Z_m/k} \mathfrak{A}) = (Z_m : k)$  beweisen. Um daraus die entsprechende Relation  $(\alpha : \alpha N_{Z/k} \mathfrak{A}) = p$  für den Teilkörper  $Z$  zu erhalten, wird der folgende Hilfssatz gebraucht: Wenn für zu  $m$  prime

Primideale  $q_1, \dots, q_r$  von  $k$  eine Relation  $\prod_{i=1}^r q_i^{a_i} \in N_{Z_m/k} \mathfrak{A}$  mit nicht sämtlich durch  $p$  teilbaren  $a_i$  gilt, so erfüllen die Frobeniussubstitutionen  $\left( \frac{Z_m/k}{q_i} \right)$  eine Relation von der gleichen Art.

Deuring (Leipzig).

### Zahlentheorie:

**Toscano, Letterio:** Sulla somma delle potenze dello stesso grado dei primi  $n$  numeri interi. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 234—236 (1935).

**Bang, A. S.:** Über Zahlen der Form  $a^m + b^m - c^m$ . Mat. Tidsskr. B **1935**, 49 bis 59 [Dänisch].

**Chowla, S.: On a certain arithmetical function.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 772—774 (1935).

Let  $\varepsilon(k)$  denote the least  $s$  such that  $\sum_{n=1}^s \varepsilon_n m_n^k = 0$  for infinitely many coprime  $m_i$ , and any choice of signs  $\varepsilon_i$ . Trivially  $\varepsilon(k) \leq 2k + 2$ , and conjecturally  $\varepsilon(k) \leq 2k$ . Except when  $k = 2^t$  or  $3 \cdot 2^t$  ( $t > 1$ ), or  $p^u(p-1)$  or  $\frac{1}{2}p^u(p-1)$  ( $u > 0$ ) ( $p$  odd prime), then  $\varepsilon(k) \leq 2k + 1$ . The proof uses a deep-lying result of Hardy and Littlewood [Part. Num. VI, Math. Z. **23**, 1—37 (1925)]. *G. Pall (Montreal).*

**Chowla, S.: The representation of a large number as a sum of „almost equal“ cubes.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **6**, 146—148 (1935).

Wright has considered the representation of large numbers as a sum of nine „almost equal“ cubes. Chowla treats eight cubes by a modification of Landau's and Wright's methods. See this Zbl. **9**, 153. *G. Pall (Montreal).*

**Vinogradov, I.: On Waring's problem.** Ann. of Math., II. s. **36**, 395—405 (1935).

An account is given in English of the author's method of proving

$$G(n) \leq n(6 \log n + \log 216 + 4).$$

In § 1, line 2, read  $\sigma = n(1 - \nu)^k$ . Cf. this Zbl. **10**, 9 and 391. *G. Pall.*

**Wright, E. Maitland: On sums of  $k$ -th powers.** J. London Math. Soc. **10**, 94—99 (1935).

Let  $v(k)$  denote the least  $n$  for which infinitely many non-trivial solutions of

$$x_1^k + \dots + x_m^k = y_1^k + \dots + y_n^k \quad (1)$$

exist with  $m < n$  and positive integral  $x_i, y_i$ ;  $J(k)$  the least  $j$  for which integral solutions  $a_i, b_i$  exist of

$$a_1^l + \dots + a_j^l = b_1^l + \dots + b_j^l \quad (l = 1, \dots, k-2), \quad (\text{not for } l = k-1). \quad (2)$$

Trivially,  $J(k) \geq k-1$ ; by examples given,  $J(k) = k-1$  when  $3 \leq k \leq 9$ ; and similar examples not given show that  $J(10) \leq 10, \dots, J(30) \leq 1960$ . It follows from a previous result [J. London Math. Soc. **9**, 267—272 (1934); this Zbl. **10**, 103] that  $J(k) = O(1 \cdot 307^k)$ . For any  $k \geq 3$  and  $j$  for which (2) is solvable, it is deduced that infinitely many  $N$  have two distinct representations as a sum of  $j+1$  positive  $k$ -th powers, and that  $v(k) \leq j+1$ ; hence if  $3 \leq k \leq 9$ , infinitely many  $N$  are representable as two distinct sums of  $k$  positive coprime  $k$ -th powers;  $v(k) \leq k$ ;  $v(10) \leq 11, \dots, v(30) \leq 1961$ ;  $v(k) = O(1 \cdot 307^k)$ . *G. Pall (Montreal).*

**Segal, B.: On some problems of the additive theory of numbers.** Ann. of Math., II. s. **36**, 507—520 (1935).

The value of  $G(c)$  formerly obtained (this Zbl. **9**, 299) is improved by using a theorem of Van der Corput's on sums of the type  $\sum e^{2\pi i f(x)}$ , where  $x$  ranges over a sequence of successive integers. *G. Pall (Montreal).*

**Ricci, Giovanni: Sull'aritmetica additiva degl'interi liberi da potenze.** Tôhoku Math. J. **41**, 20—26 (1935).

Verf. beweist analog zu einem Satz von Estermann: Es sei

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_g x^g, \quad g \geq 1, c_g > 0, c_m \text{ ganz};$$

für  $N > 0$  sei  $A(N)$  die Diskriminante und  $D(N)$  der größte feste Primteiler von  $N - F(x)$ . — Es sei  $\varepsilon > 0$ ,  $N > N_0(\varepsilon)$ , dann gibt es mindestens  $c N^{\frac{1}{g}} (\log \log N)^{-g}$  Zahlen  $x$ , so daß  $\frac{N - F(x)}{D(N)} \cdot 1$  zwischen  $O$  und  $N$  liegt, 2. zu  $A(n)$  teilerfremd ist, 3. nicht durch das Quadrat einer Primzahl  $p \leq N^{\frac{1}{g+\varepsilon}}$  teilbar ist. *Hans Heilbronn.*

**Shah, S. M.: On the series**  $\sum_{p < \sqrt{x}} \frac{1}{p \log^r \left( \frac{x}{p} \right)}$ . Indian Phys.-Math. J. **6**, 19—25 (1935).

$p$ -Summen mögen über Primzahlen laufen;  $r \neq 0$ ,  $n \geq 1$ ,  $\nu \geq 2$ ,  $N \geq 3$  seien ganz;  $x \geq 3$ ;



$$E_0 = \lim_{x=\infty} \left( \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x \right), \quad E_n = \lim_{x=\infty} \left( \sum_{p \leq x} \frac{\log^n p}{p} - \frac{\log^n x}{n} \right),$$

$$A_r = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{(1-u)^r} - 1 \right\} \frac{du}{u}, \quad Li(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u};$$

$\pi_\nu(x)$  sei die Anzahl solcher Zahlen  $\leq x$ , die Produkte von  $\nu$  verschiedenen Primzahlen sind. — In der vorliegenden Arbeit zeigt Verf., daß

$$(1) \quad \sum_{p < \sqrt{x}} \frac{1}{p \log^r \left( \frac{x}{p} \right)} = \frac{\log \log x}{\log^r x} + \frac{E_0 - \log 2 + A_r}{\log^r x} \\ + \sum_{n=1}^N \frac{r(r+1) \cdots (r+n-1)}{n!} \frac{E_n}{\log^{r+n} x} + O\left( \frac{1}{\log^{r+N+1} x} \right)$$

ist. Den Spezialfall  $r \geq 1$  von (1) hatte Verf. in seiner  $\pi_2(x)$ -Arbeit (s. dies. Zbl. 8, 148) gebracht, aber fehlerhaft begründet, wodurch der dortige Hauptsatz

$$(2) \quad \pi_2(x) = Li(x) \log \log x + E_0 \frac{x}{\log x} - \frac{1}{2} Li^2(\sqrt{x}) \\ + \sum_{n=1}^{N-2} n! \left\{ A_{n+1} - \log 2 + \sum_{m=0}^n \frac{E_m}{m!} \right\} \frac{x}{\log^{n+1} x} + O\left( \frac{x}{\log^N x} \right)$$

in Frage gestellt war. Der Beweis von (1) ist einwandfrei (wenn auch stellenweise etwas zu umständlich) und damit auch (2) gesichert. *A. Walfisz* (Radość, Polen).

**Shah, S. M.:** On a formula for  $\pi_\nu(x)$ . Proc. Acad. Sci., Allahabad 4, 207—216 (1935).

Es mögen die Bezeichnungen der vorhergehenden Besprechung gelten. Außerdem bedeute  $\sigma_\nu(x)$  die Anzahl solcher Zahlen  $\leq x$ , die Produkte von  $\nu$  (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen sind. Verf. beweist

$$\frac{\pi_\nu(x)}{\sigma_\nu(x)} = \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{x(\log \log x)^{\nu-1}}{\log x} + \frac{E_0}{(\nu-2)!} \frac{x(\log \log x)^{\nu-2}}{\log x} (1 + o(1)).$$

*A. Walfisz* (Radość, Polen).

**Watson, G. N.:** Singular moduli. III. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 83 bis 142 (1935).

Für die negativen Determinanten  $-n$ , die in der Gaußschen Klassifikation der binären quadratischen Formen 1 Geschlecht und 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 Klassen haben, teilt Verf. systematisch Klassengleichungen mit. Mit Hilfe der Gaußschen Klassenanzahltafeln hat Verf. 80 solche Determinanten gefunden; die absolut größte ist  $-2683$ . Ob es darüber hinaus noch weitere gibt, ist noch nicht sichergestellt, wenn auch unwahrscheinlich. Mit Ausnahme von  $n = 1, 2, 4$  sind alle  $n$  von der Form  $8m-1$  oder  $8m+3$ . Im ersten Falle gebraucht Verf. als Klasseninvariante  $F_n = 2^{-\frac{1}{2}} f(\sqrt{-n})$ , im zweiten  $f_n = f(\sqrt{-n})$ , wo  $f$  die Webersche Funktion  $f(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + q^{2\nu-1})$

( $q = e^{\pi i \tau}$ ,  $J(\tau) > 0$ ) bezeichnet. Für die einzelnen Werte von  $n$  gibt Verf. die Gleichungen für  $f_n$  bzw.  $F_n$  an und fügt (mit 10 wohlbegründeten Ausnahmen) Angaben über die Auflösungen dieser Gleichungen hinzu. Eine sorgfältige Einleitung unterrichtet über die Methode, nach der die Gleichungen berechnet sind. Die Resultate der Vorgänger sind der Vollständigkeit halber mit ausführlichen Literaturangaben in die Abhandlung eingearbeitet. (II. vgl. dies. Zbl. 5, 296.) *Bessel-Hagen* (Bonn).

**Siegel, Carl Ludwig:** Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. of Math., II. s. 36, 527—606 (1935).

Die Arbeit bringt eine Reihe höchst bedeutender Fortschritte in der Theorie der quadratischen Formen wie auch vor allem für Begriff und Theorie der Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen: Der erste Teil § 1—9 ist rein arithmetisch und enthält eine Theorie der

Darstellung einer definiten Form  $\mathfrak{X}$  in  $n$  Variablen durch eine ebensolche Form  $\mathfrak{S}$  in  $m$  Variablen ( $m \geq n$ ). Als Darstellung zählt dabei jede Lösung  $\mathfrak{X}$  der Matrixengleichung

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{S} \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \quad (1)$$

mit den Bedingungen: 1. Gegeben  $\mathfrak{S}$  als Matrix des Grades  $m$ ,  $\mathfrak{X}$  als solche des Grades  $n$ , beide ganzzahlig, symmetrisch und positiv, d. h. zu einer positiv definiten Form gehörend. 2. Gesucht  $\mathfrak{X}$  als ganzzahlige Matrix von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten,  $\mathfrak{X}'$  die transponierte Matrix. — Ausgehend von dem Satz von Hasse, daß für die Existenz einer Lösung  $\mathfrak{X}$  mit rationalen Elementen notwendig und hinreichend ist die Lösbarkeit im Bereich  $R_q$  der  $q$ -adischen Zahlen für jedes  $q$  und die Lösbarkeit im Bereich  $R_\infty$  der reellen Zahlen, gibt Verf. in der Einleitung eine sehr instruktive Schilderung der heuristischen Überlegungen, welche ihn zu der Vermutung führten, daß auch zwischen der Anzahl von Lösungen  $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  in ganzen rationalen Zahlen und den entsprechenden Lösungszahlen  $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  und  $A_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  in  $R_q$  und  $R_\infty$  eine quantitative Beziehung bestehen muß, sofern man sich nicht nur auf die Lösung einer solchen Gleichung beschränkt, sondern nach der Anzahl der Darstellungen von  $\mathfrak{X}$  durch alle Formen des durch  $\mathfrak{S}$  definierten Geschlechtes quadratischer Formen fragt. Durchläuft  $\mathfrak{S}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ein volles System nichtäquivalenter quadratischer Formen, welche mit  $\mathfrak{S}$  zum selben Geschlecht gehören (in der benutzten Terminologie „verwandt mit  $\mathfrak{S}$ “ sind,  $\mathfrak{S}_k v \mathfrak{S}$ ), und bezeichnet  $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  die Lösungszahl von (1),  $E(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$  die (endliche) Zahl der Automorphismen von  $\mathfrak{S}$ , so wird „Maß des Geschlechtes von  $\mathfrak{S}$ “ in der klassischen Theorie die Größe

$$M(\mathfrak{S}) = \sum_k \frac{1}{E(\mathfrak{S}_k)}$$

(die mittlere Klassenzahl des Geschlechtes) genannt. An Stelle der Lösungszahl  $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  hat man nun die Größe

$$M(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum_k \frac{A(\mathfrak{S}_k, \mathfrak{X})}{E(\mathfrak{S}_k)}$$

zu untersuchen. Man bezeichne mit  $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  die Lösungszahl von (1) im Ring der  $q$ -adischen ganzen Zahlen, ferner mit  $A_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  die passend definierte „Zahl der Lösungen“ von (1) durch reelle Matrizen (Hilfssatz 26), so ist der Hauptsatz (= Satz 1, 2 S. 555) die Aussage:

$$\frac{1}{M(\mathfrak{S})} M(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \varepsilon \cdot A_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})}{m n - \frac{n(n+1)}{2}} \quad (2)$$

für  $m > n$ . Für  $m = n$  ist im Nenner rechts noch der Faktor „2 hoch Anzahl der Primfaktoren von  $q$ “ anzubringen. Ferner ist  $\varepsilon = 1$  für  $m > n + 1$  oder  $m = n = 1$ , sonst  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , und  $q$  durchläuft eine gewisse Folge ganzer Zahlen, z. B. die Folge  $2!, 3!, 4! \dots$ . Die Größe  $A_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  wird durch Hilfssatz 26, § 7 auf ein nur von  $m, n$  abhängiges bestimmtes Integral zurückgeführt, das nachher in § 9 und in § 10, Gl. (71) auch explizite berechnet wird. — Zur Vorbereitung für den Beweis des Hauptsatzes werden in den § 1–8 allgemeine Sätze über Darstellung quadratischer Formen, auch indefiniter Formen, entwickelt. Primitive Darstellung  $\mathfrak{X}$  heißt eine Lösung von (1) mit der Eigenschaft: Aus „ $\mathfrak{X} \mathfrak{A}$  ganzzahlig“ und „ $\mathfrak{A}$  rationalzahlig“ folgt „ $\mathfrak{A}$  ganzzahlig“. Nichtprimitive Darstellungen werden mit Hilfe einer quadratischen Matrix  $\mathfrak{B}$ , welche als Teiler der Darstellung bezeichnet wird, auf primitive Darstellungen zurückgeführt. Für definite Formen heiße die Anzahl der primitiven Darstellungen  $B(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$ , und es ist dann

$$A(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum_{\mathfrak{B}} B(\mathfrak{S}, \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{X} \mathfrak{B}^{-1}).$$

Dabei durchläuft  $\mathfrak{B}$  ein volles System solcher ganzen Matrizen  $n$ -ten Grades mit positiver Determinante, welche nicht auseinander durch linksseitige Multiplikation mit einer unimodularen Matrix hervorgehen und für welche außerdem  $\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{X} \mathfrak{B}^{-1}$  ganzzahlig ist (Hilfssatz 3 und 4 in § 1 sowie Gl. (54) in § 9). Analoge Formeln gelten auch für die  $q$ -adischen Darstellungen (Hilfssatz 17 in § 3 sowie Gl. (53), (55) in § 9). — Für definite und indefinite Formen werden die Darstellungszahlen  $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$  untersucht mit dem Ergebnis: Wenn  $q$  und  $r$  teilerfremd, so ist  $A_{qr}$  auf  $A_q$  und  $A_r$  zurückführbar (Hilfssatz 15 in § 3 und 18 in § 4). Es gibt ferner einen festen Exponenten  $a_0$ , so daß für alle  $q = p^a$  ( $p$  = Primzahl) mit  $a > a_0$  der Ausdruck

$$q^{\frac{n(n+1)}{2} - mn} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{X})$$

von  $a$  unabhängig ist (Hilfssatz 13, § 3). Für alle ungeraden Primzahlen  $p$ , welche nicht in der Determinante von  $\mathfrak{S}$  oder  $\mathfrak{X}$  aufgehen, wird der Wert dieses Ausdrucks berechnet (Hilfssatz 12, § 3, der durch vollständige Induktion bezüglich  $n$  bewiesen wird). Durch Hilfssatz 16 in § 3 werden auch noch für den Fall  $n = 1$  einige der Ausnahmeprimzahlen berücksichtigt. — Nach diesen Vorbereitungen wird in § 8 und 9 der Beweis des Hauptsatzes erbracht. Er wird durch vollständige Induktion geführt. Daß man auf diesem Wege zum Ziel gelangt, beruht auf der Möglichkeit der „quadratischen Ergänzung“ einer Darstellung  $\mathfrak{X}$  im Falle  $m > n$ , die auch in der klassischen Theorie eine Rolle spielt. Durch Anfügung einer Matrix  $\mathfrak{A}$



von  $m$  Zeilen und  $m - n$  Spalten an  $\mathfrak{X}$  läßt sich  $\mathfrak{X}$  zu einer quadratischen Matrix  $\mathfrak{U}$  des Grades  $m$  ergänzen, wofür

$$\mathfrak{U} \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D}' & T^{-1} \mathfrak{S} + \mathfrak{D}' \mathfrak{X} \mathfrak{D} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$T$  ist die Determinante von  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{S}$  eine quadratische Matrix des Grades  $m - n$  und  $\mathfrak{D}$  eine Matrix von  $n$  Zeilen und  $m - n$  Spalten. Untersucht man nun die verschiedenen Möglichkeiten der quadratischen Ergänzung von  $\mathfrak{X}$ , so ergibt sich [§ 8, Gl. (49)]

$$\sum_k \frac{B(\mathfrak{E}_k, \mathfrak{X})}{E(\mathfrak{E}_k)} = \sum_{\mathfrak{S}} F(\mathfrak{S}, \mathfrak{E}) M(\mathfrak{S}). \quad (4)$$

Hierin durchläuft  $\mathfrak{S}$  die verschiedenen Geschlechtsrepräsentanten positiv definiter Matrizen des Grades  $m - n$  mit der Determinante  $ST^{m-n-1}$ . Und  $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{E})$  bedeutet bei festem  $\mathfrak{S}, \mathfrak{E}, \mathfrak{X}$  die Anzahl der Matrizen von der Gestalt (3), welche mit  $\mathfrak{E}$  zum selben Geschlecht gehören und wofür das  $\mathfrak{D}$  „reduziert“ ist. Eine analoge Formel mit demselben  $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{E})$  wird dann für die  $q$ -adischen Darstellungen hergeleitet [Gl. (51) und (52) in § 8]. Nach diesem schwierigen Teil wird dann in § 9 durch vollständige Induktion geschlossen, daß rechts in (4) das Maß  $M(\mathfrak{S})$  für Matrizen niedriger als  $m$ -ten Grades vorkommt. Zunächst wird der Hauptsatz für  $m = 1$  durch direkte Ausrechnung als richtig erwiesen. Gilt der Hauptsatz ferner für  $\mathfrak{E} = \mathfrak{X}$  mit einem bestimmten  $m$ , so gilt er auch für  $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{X}$  mit demselben  $m$  und  $m = n$ . Es werde nun angenommen, der Hauptsatz sei richtig für  $\mathfrak{E} = \mathfrak{X}$  und alle  $m < m_1$  (wobei  $m_1 \geq 2$ ). Wenn man zeigen kann, daß er dann auch für  $m = m_1$ ,  $n < m$  und außerdem für  $\mathfrak{E} = \mathfrak{X}$  mit  $m = m_1$  richtig ist, so ist er allgemein bewiesen. Die Durchführung zeigt dann nach elementaren Umformungen, daß in der Gleichung des Hauptsatzes die beiden Seiten sich nur um einen Faktor  $\varrho(\mathfrak{E})$  unterscheiden können, welcher nur noch von  $\mathfrak{E}$  abhängen kann, und von dem nachzuweisen ist, daß er gleich 1 ist. Für diesen Nachweis kann man dann  $\mathfrak{X}$  willkürlich nehmen; man wählt  $n = 1$ ,  $\mathfrak{X} = (t)$  und kann dann nach klassischem Vorbild das  $\varrho(\mathfrak{E})$  durch eine Mittelbildung über  $t$  bestimmen. Bei dieser ziemlich komplizierten Rechnung sind die Fälle gerades und ungerades  $m$  verschieden zu behandeln, und bei den niedersten Werten  $m = 2$  und  $m = 3$  treten dann noch besondere Konvergenzschwierigkeiten auf. — Spezielle Beispiele in § 10 geben Resultate der älteren Theorie (die in der Arbeit nicht vorausgesetzt wird), auch werden asymptotische Formeln von Hardy-Littlewood gedeutet und festgestellt, warum in manchen Fällen diese asymptotischen Werte auch die exakten Werte sind. — In § 11 wird der Inhalt des Hauptsatzes für den Fall  $n = 1$  ins Analytische übersetzt, indem die Potenzreihen nach  $e^{2\pi i \tau}$  mit den Entwicklungskoeffizienten  $A(\mathfrak{E}_k, t)$  (wo also  $n = 1$ ,  $\mathfrak{X} = (t)$ ,  $t$  eine ganze Zahl  $\geq 0$ ) eingeführt werden. Diese Reihen sind bekanntlich  $m$ -fache Thetareihen in  $\tau$ . Für alle  $\mathfrak{E}_k$  desselben Geschlechtes verhalten sich diese Reihen asymptotisch gleichartig in jedem rationalen Randpunkt, die Differenz zweier solcher ist eine in allen rationalen Punkten verschwindende Modulform der Dimension  $-\frac{m}{2}$ . Bestimmt

man nach Hardy-Littlewood den asymptotischen Wert der Koeffizienten (dieser ist gerade die rechte Seite von (2)) und setzt mit diesem asymptotischen Wert eine Potenzreihe an, so erweist sich auch diese Reihe als Modulform, und zwar ist es bei geradem  $m$  bekanntlich eine Linearkombination der Eisenstein-Reihen höherer Stufe, bei ungeradem  $m$  sind es die

von Hardy, Mordell u. a. definierten Eisenstein-Reihen gebrochener Dimension  $-\frac{m}{2}$ . Bemerkenswert ist, daß mit Hilfe des Begriffes Modulform auch die Bestimmung des  $\varrho(\mathfrak{E})$  aus § 10 sich vereinfacht durchführen läßt, solange die Reihen absolut konvergieren, d. h. für  $m \geq 5$ . In den übrigen Fällen wird sich vermutlich dieser Weg durch Einführung eines, absolute Konvergenz erzeugenden, Faktors auch gangbar erweisen, wie es Ref. bei  $m = 2$  und 4 schon gezeigt hat. — Diese bekannten Dinge in Verbindung mit dem Hauptsatze sind nun für den Verf. der Anlaß gewesen, durch Übertragung auf den Fall  $n > 1$  einen Ansatz zu finden, der für die Funktionentheorie von mehreren Variablen von weittragender Bedeutung ist. Es gelingt ihm, in § 12, 13 eine passende, sehr elegante Verallgemeinerung der Eisenstein-Reihen auf mehrere Variablen zu geben. Der erste Schritt ist eine Verallgemeinerung der Partialbruchzerlegung der Kotangente und ihrer Derivierten, indem durch Hilfssatz 38, § 12 folgende schöne Formel bewiesen wird:

$$\sum_{\mathfrak{X}} |\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}} e^{-\sigma(\mathfrak{X})} = \Gamma(\varrho, n) \sum_{\mathfrak{Y}} \frac{1}{|\mathfrak{Y}| + 2\pi i \mathfrak{Y}} e^{-\varrho}.$$

Dabei durchläuft  $\mathfrak{X}$  alle ganzzahligen positiven symmetrischen Matrizen  $n$ -ten Grades,  $\mathfrak{Y}$  die Matrizen aller ganzzahligen quadratischen Formen von  $n$  Variablen,  $|\dots|$  ist die Determinante,  $\sigma$  die Spur,  $\varrho$  eine feste reelle Zahl  $> \frac{n(n+1)}{2}$  und

$$\Gamma(\varrho, n) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \Gamma(\varrho) \Gamma\left(\varrho - \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\varrho - \frac{n-1}{2}\right).$$



Endlich ist  $\mathfrak{Y}$  eine variable Matrix  $n$ -ten Grades, symmetrisch mit positivem Realteil. Die weitere Entwicklung führt dann naturgemäß zu den neuen Reihen, welche analytische Funktionen der Elemente einer symmetrischen Matrix  $\mathfrak{X}$  mit positivem Imaginärteil sind [Satz 6 und Gl. (143)]:

$$\varphi(\mathfrak{X}) = \sum_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} \frac{1}{|\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}|^{2r}}.$$

Hier durchläuft  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  ein volles System nichtassoziierter teilerfremder, symmetrischer Matrizenpaare,  $r$  ist eine ganze Zahl  $> \frac{n(n+1)}{2}$ . Als Elemente von  $\mathfrak{X}$  kann man etwa die Perioden eines Systems von Normalintegralen 1. Gattung für ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte  $n$  wählen. Als Modulsstitutionen der Matrix  $\mathfrak{X}$  werden dann diejenigen Transformationen eingeführt, welche nach Riemann den Übergang von einem System von Normalperioden zu einem ebensolchen vermitteln. Gegenüber diesen hat  $\varphi(\mathfrak{X})$  den Charakter relativer Invarianz. Diese  $\varphi(\mathfrak{X})$  sind definiert nicht nur für die Riemannschen Periodenmatrizen  $\mathfrak{X}$ , sondern auch für Jacobische Periodensysteme wie auch die Thetafunktionen. In § 13 wird ein Programm für die Theorie dieser allgemeinen Modulfunktionen entworfen und in den Elementen auch durchgeführt. Als einer der wichtigsten Sätze sei erwähnt, daß die Modulfunktionen für Jacobische Matrizen einen algebraischen Funktionenkörper von  $\frac{n(n+1)}{2}$  Variablen bilden und daß die Menge der Riemannschen Periodenmatrizen  $\mathfrak{X}$ , also solche, die zu Integralen 1. Gattung eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht  $n$  gehören, durch algebraische Gleichungen zwischen den Erzeugenden jenes Funktionenkörpers definiert werden können. — Verf. stellt zwei weitere Teile der Arbeit in Aussicht, in denen die Übertragung auf indefinite Formen sowie auf algebraische Zahlkörper an Stelle des rationalen Zahlkörpers vorgenommen werden soll.

E. Hecke (Hamburg).

**Hecke, E.: Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen.** Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. 13, Nr 10, 1—16 (1935).

Verf. berichtet über Methoden und Resultate einer Theorie, deren ausführliche Darstellung in den Mathematischen Annalen erscheinen soll. — Sei  $F^{(\varrho)}(\tau)$ ,  $\varrho = 1, 2, \dots, \kappa$ , ein volles System linear unabhängiger ganzer Modulformen der Dimension  $-k$  zur Stufe 1. Dann führt der lineare Operator

$$T_n(F(\tau)) = n^{k-1} \sum_{\substack{a, d=n \\ b \bmod d; d > 0}} F\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k}$$

die Schar in sich über:  $T_n(F^{(\varrho)}(\tau)) = \sum_{\sigma=1}^{\kappa} \lambda_{\varrho\sigma}(n) F^{(\sigma)}(\tau)$ . Bezeichnet  $\lambda(n)$  die Matrix der  $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$ , so ist bei geeigneter Definition von  $\lambda(0)$  jedes Glied der Matrix  $B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) z^n$ ,

$z = e^{2\pi i \tau}$ , Reihenentwicklung einer Form aus der Schar der  $F^{(\varrho)}(\tau)$ . Die aus den „zugeordneten“ Dirichletreihen  $\varphi_{\varrho\sigma}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\varrho\sigma}(n)}{n^s}$  gebildete Matrix  $\Phi(s)$  besitzt nun eine Eulersche Produktdarstellung

$$\Phi(s) = \prod_p (\lambda(1) - \lambda(p) p^{-s} + \lambda(1) p^{k-1} p^{-2s})^{-1}.$$

Bei geeigneter Wahl der Erzeugenden  $F^{(\varrho)}(\tau)$  enthalten alle Matrizen  $\lambda(n)$  und damit  $B(\tau)$  und  $\Phi(s)$  oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen. Dann gilt also die entsprechende Produktdarstellung für die  $\varphi_{\varrho\varrho}(s)$  und damit, sofern diese linear unabhängig sind, für die einem Erzeugendensystem der Schar der  $F^{(\varrho)}(\tau)$  zugeordneten Dirichletreihen. Es ist also hier eine Begründung gegeben für die bei fast allen bekannten Beispielen bestehende Tatsache, daß das Koeffizientengesetz einer ganzen

Modulform  $F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  mit den multiplikativen Eigenschaften von  $n$  zusammenhängt. — Der Ansatz läßt sich auf höhere Stufen übertragen und führt hier zu einem ähnlichen Ergebnis.

H. Spies (Hamburg).



**Titchmarsh, E. C.:** On van der Corput's method. VI. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 106—112 (1935).

In der ersten Abhandlung der Serie (s. dies. Zbl. 2, 329) gab Verf. einen sehr einfachen Beweis für die Nielsensche Abschätzung der Gitterpunktzahl im Kreise:

$$\sum_{u^2+v^2 \leq x} 1 = \pi x + O(x^{\frac{2}{3}}).$$

In der vorliegenden Arbeit will Verf. seine Methode so umgestalten, daß sie dasselbe Ergebnis für die Ellipse, nämlich

$$\sum_{au^2+buv+cv^2 \leq x} 1 = \frac{2\pi x}{\sqrt{4ac-b^2}} + O(x^{\frac{2}{3}})$$

( $a, b, c$  ganzzahlig;  $a > 0, c > 0, 4ac - b^2 > 0$ ) liefert. Der Beweis ist stellenweise schwer verständlich, weil mit vielen Parametern gerechnet wird, die nicht deutlich genug gegeneinander abgegrenzt sind. Die Überlegungen des § 5 scheinen mir überdies fehlerhaft zu sein. (V. s. dies. Zbl. 10, 10.) *A. Walfisz* (Radość, Polen).

**Hofreiter, Nikolaus:** Bemerkung zu meiner Arbeit: „Über einen Approximationssatz von Minkowski.“ Diese Zeitschrift, Bd. 40. Mh. Math. Phys. 42, 210 (1935).

**Remak, Robert:** Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Hofreiter: „Über einen Approximationssatz von Minkowski.“ Diese Zeitschrift, Bd. 40. Mh. Math. Phys. 42, 211 bis 214 (1935).

In his treatment for  $n = 4$  of Minkowski's Theorem on the product of non-homogeneous linear forms, Hofreiter used geometrical considerations which Remak points out here are faulty for  $n \geq 4$ , to prove the following theorem. Every point lattice in  $n$ -dimensional space can be transformed by dilatation parallel to the axes into a point lattice with  $n$  equal independent minima. Remak discusses the logical possibilities as regards Minkowski's Theorem according as the preceding statement is true or false (see this Zbl. 8, 199).

*G. Pall* (Montreal).

## Gruppentheorie.

● **Miller, George Abram:** The collected works. Vol. 1. Urbana: Univ. of Illinois 1935. XI, 475 S. bound \$ 7.50.

Der Band enthält die (durchweg gruppentheoretische Fragen behandelnden) Arbeiten von G. A. Miller bis zum Jahre 1900 sowie drei Artikel historischer Natur, von denen insbesondere der letzte [Abhandlung Nr. 62] zu erwähnen ist, der die Geschichte der Gruppentheorie bis 1900 behandelt und zugleich die bei der Lektüre älterer Arbeiten oft störende Vieldeutigkeit der gruppentheoretischen Terminologie klarstellt. — Es ist hier nicht möglich, auf den Inhalt des Bandes in allen Einzelheiten einzugehen; hervorgehoben seien von den Untersuchungen über Permutationsgruppen die Aufzählung der intransitiven bis zum Grade 10, der transitiven bis zum Grade 14 und der primitiven bis zum Grade 17 sowie die Konstruktion aller transitiven Gruppen gegebener Ordnung für Gruppen, deren Ordnung das Produkt von drei Primzahlen ist, oder die symmetrische und alternierende Gruppe von 6 Symbolen. In diesen Arbeiten sind zugleich allgemeine Sätze und Konstruktionsmethoden für transitive und primitive Gruppen enthalten. Besonders erwähnt seien ferner die Abhandlungen über die Schranke der Transitivität mehrfach transitiver Gruppen, die die alternierende Gruppe ihres Grades nicht enthalten [Nr. 35], und die Sätze über die in primitiven Gruppen der Grade  $p, p+1, p+2, k \cdot p$  ( $p$  eine Primzahl) enthaltenen einfachen Gruppen [Nr. 34, 58, 59]. Die Arbeiten über abstrakte Gruppen enthalten unter anderem eine Abschätzung der Ordnung einer maximalen abelschen Untergruppe in einer Gruppe von Primzahlpotenzordnung [42], eine Ausdehnung eines Sylowschen Satzes auf die Abzählung von Untergruppen, deren Ordnung nur durch zwei Primzahlen teilbar ist [36], Untersuchungen über Kommutatorgruppen [18, 34] und charakteristische Untergruppen sowie eine eingehende Diskussion zahlreicher spezieller Gruppen, so der alternierenden und der Hamiltonschen Gruppen.

*Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Tazawa, Masatada:** Über die Darstellung der beliebigen Gruppen durch gebrochene lineare Transformationen. Sci. Rep. Tōhoku Univ., I. s. 24, 352—371 (1935).

Mit Hilfe der J. v. Neumannschen Theorie der fastperiodischen Funktionen auf beliebigen Gruppen [Trans. Amer. Math. Soc. 36, 445—492 (1934); dies. Zbl. 9, 349]



werden die fastperiodischen (beschränkten) Darstellungen einer beliebigen Gruppe  $\mathfrak{G}$  durch gebrochene lineare Substitutionen untersucht. Jeder solchen Darstellung entspricht nach I. Schur [J. reine angew. Math. **127**, 20—50 (1904)] eine Darstellung von  $\mathfrak{G}$  durch Matrizen  $D(a)$ , bei deren Multiplikation ein Faktorensystem auftritt,  $D(a)D(b) = u(a, b)D(ab)$ . Verf. zeigt, daß jedes Faktorensystem  $u(a, b)$  fastperiodisch in  $a$  und  $b$  zugleich ist und daß es stets ein assoziiertes vom Betrag 1 gibt, das Charakter einer durch  $\mathfrak{G}$  bestimmten Abelschen Gruppe ist. Zu einer festen Klasse assoziierter Faktorensysteme wird ein verallgemeinerter Gruppenring  $\mathfrak{o}$  aus den fastperiodischen Funktionen auf  $\mathfrak{G}$  konstruiert (nach dem Vorbild von F. Peter und H. Weyl [Math. Ann. **97**, 737—755 (1927)] und einer Arbeit des Verf. [Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **23**, 76—88 (1934); dies. Zbl. **9**, 155]).  $\mathfrak{o}$  ist  $\mathfrak{G}$ -Modul. Nach bekannten Methoden [J. v. Neumann l. c., F. Peter und H. Weyl l. c., G. Köthe, Math. Ann. **103**, 545—572 (1930)] erhält man durch Aufspaltung von  $\mathfrak{o}$  in unzerlegbare Linksideale alle irreduziblen Darstellungen von  $\mathfrak{G}$  mit dem gegebenen Faktorensystem. Alle Darstellungen sind vollständig reduzibel, das von den Koeffizienten der irreduziblen Darstellungen gebildete System von fastperiodischen Funktionen ist vollständig. Köthe (Münster).

**Vaidyanathaswamy, R.:** An extension of the determinant-concept based on group-characters. J. Indian Math. Soc., N. s. **1**, 186—198 (1935).

Die von Rice [Amer. J. Math. **40** (1918)] zuerst gegebene Definition einer „mehrdimensionalen Determinante“ wird folgendermaßen verallgemeinert: Es sei  $a(m_1, m_2, \dots, m_r)$  ( $m_1, \dots, m_r = 1, 2, \dots, n$ ) eine  $r$ -dimensionale Matrix, weiter  $G_r$  eine Permutationsgruppe der Ordnung  $r$  der  $n$  Nummern  $1, 2, \dots, n$ , und es seien  $\chi_1, \dots, \chi_r$  abelsche Charaktere (d. h. Charaktere von linearen Darstellungen) der Gruppe  $G_r$ . Dann wird die verallgemeinerte Determinante  $|a|$  durch

$$|a| = \frac{1}{r} \sum \chi_1(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n}) \chi_2(m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2n}) \dots a(m_{11}, m_{21}, \dots, m_{r1}) \\ a(m_{12}, m_{22}, \dots, m_{r2}) \dots a(m_{1n}, m_{2n}, \dots, m_{rn})$$

definiert, wobei  $(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n}), \dots, (m_{r1}, m_{r2}, \dots, m_{rn})$  unabhängig voneinander alle Permutationen von  $G_r$  durchlaufen. Es gilt  $|a| = 0$ , ausgenommen wenn das Produkt  $\chi_1 \chi_2 \dots \chi_r$  der Hauptcharakter  $\chi_0$  ist. Es werden Entwicklungen nach niedriger-dimensionalen Determinanten sowie Multiplikationssätze angegeben. van der Waerden (Leipzig).

**Denjoy, Arnaud:** Sur la géométrie des groupes homographiques. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 497—499 (1935).

Es sei  $G(x)$  die in der früheren Note (dies. Zbl. **12**, 154) eingeführte Menge der Bildpunkte des Punktes  $x$  der komplexen Ebene mittels der linear gebrochenen Substitutionen  $x' = \frac{Ax+B}{Cx+B}$  einer unendlichen Gruppe  $G$  und  $E$  die komplementäre Menge der Ableitung  $G'(x)$  von  $G(x)$ . Wenn  $G(x)$  nicht überall dicht ist, besteht  $E$  aus einer Menge von Bereichen, deren jedes in bezug auf die Substitutionen einer Untergruppe von  $G$  invariant bleibt. Die Struktur der genannten Bereiche wird an einem Beispiel erläutert. Von den übrigen Resultaten der Arbeit mag das folgende Resultat zitiert werden: Wenn die Menge  $G(x)$  für vier verschiedene, nicht auf einer und derselben Kreislinie liegenden Punkte  $x$  nicht überall dicht ist, so enthält die Gruppe  $G$  keine unendliche Folge gegen die Identität konvergierender Substitutionen, vorausgesetzt, daß es keinen allen Substitutionen gegenüber invarianten Punkt gibt. Myrberg (Helsinki).

**Denjoy, Arnaud:** Sur les fonctions minkowskiennes. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 584—586 (1935).

Verschiedene Bemerkungen betreffend Funktionen, welche sich linear substituieren, wenn das Argument einer linear gebrochenen Transformation einer gegebenen Gruppe unterworfen wird. Myrberg (Helsinki).



**Hedlund, Gustav A.: A metrically transitive group defined by the modular group.** Amer. J. Math. **57**, 668—678 (1935).

Verf. beweist, daß die „Quadratgruppe“ der Modulgruppe,

$$T: \quad x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y' = \frac{ay+b}{cy+d},$$

$a, b, c, d$  ganz,  $ad - bc = 1$ , in der reellen  $x$ - $y$ -Ebene metrisch transitiv ist. Dies ist mit folgendem Satze gleichbedeutend. Man betrachte die mit der Modulgruppe verbundene Fläche der Krümmung  $-1$ . Dann ist das System der geodätischen Linien im Phasenraum (Raum der Linienelemente) der Fläche metrisch transitiv. Ein ähnliches wichtiges Resultat ist vom Verf. schon vorher für gewisse geschlossene Flächen der Krümmung  $-1$  bewiesen worden. Der Ref. erlaubt sich hier hinzuzufügen, daß ihm kürzlich der Nachweis der metrischen Transitivität bei allen vollständigen Flächen der Krümmung  $-1$  und endlicher Oberfläche gelungen ist. E. Hopf.

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

● **Hausdorff, F.: Mengenlehre. 3. Aufl. (Göschens Lehrbücherei Gruppe 1, Bd. 7.)** Berlin und Leipzig: Walter de Gruyter 1935. 307 S. RM. 13.50.

Die ersten neun Kapitel der 3. Auflage sind ein fast unveränderter Abdruck der 2. Auflage. Ein neu hinzugefügtes zehntes Kapitel behandelt die Bairesche Bedingung und halb-schlichte Abbildungen; auf einige weitere inzwischen erzielte Fortschritte ist, ohne Beweise, in kleineren Nachträgen hingedeutet. F. Hausdorff (Bonn).

**Wolff, J.: Metrik der Punktmengen. Lebesgue-Integration.** Mathematica, Leiden **4**, 1—12, 33—50 u. 65—71 (1935) [Holländisch].

**Fukamiya, Masanori: Sur une propriété des ensembles mesurables.** Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **24**, 332—334 (1935).

Etant donnés deux ensembles linéaires mesurables  $A$  et  $B$ , ayant les mesures positives, et un ensemble  $R$  quelconque partout dense dans  $(-\infty, +\infty)$ , un au moins des ensembles  $(A+r)$ ,  $B$ , avec  $r \in R$ , est de mesure positive;  $A+r$  indique l'ensemble obtenu de  $A$  par une translation égale à  $r$ . L'auteur démontre ce théorème et il en dérive, que deux ensembles de mesure égale peuvent être superposés l'un à l'autre par une opération qui consiste à décomposer ces ensembles en un nombre infini de sous-ensembles, sauf peut-être un ensemble de mesure nulle. Cf. W. H. Young, Proc. Roy. Soc. London A **85**, 402—403 (1911) et H. Steinhaus, Fundam. Math. **1**, 93—104 (1920). J. Ridder (Groningen).

**Gillis, J.: A theorem on irregular linearly measurable sets of points.** J. London Math. Soc. **10**, 234—240 (1935).

Sei  $D(p, M) = \overline{\lim}$  bzw.  $\underline{D}(p, M) = \lim$  von  $L[M \cdot c(p, r)]/2r$ , wenn  $r \rightarrow 0$ , wobei  $M$  eine ebene Punktmenge,  $p$  ein Punkt von  $M$ ,  $c(p, r)$  den Vollkreis vom Radius  $r$  um  $p$  und  $L[\ ]$  das lineare Maß in der Ebene nach Carathéodory bezeichnen. Falls die beiden so definierten Größen (die obere bzw. untere Dichte von  $M$  in  $p$ ) existieren ( $M$  in obigem Sinne meßbar) und  $D(p, M) = \underline{D}(p, M) = D(p, M) =$  Dichte von  $M$  in  $p$  gleich 1 ist, so heißt  $p$  regulär, sonst irregulär; die Menge  $M$  wird regulär oder irregulär genannt je nachdem sie fast (d. h. nach eventueller Weglassung einer Teilmenge  $T$  mit  $L[T] = 0$ ) aus lauter regulären oder fast aus lauter irregulären Punkten  $p$  besteht. Wird  $c(p, r)$  durch einen Sektor  $s(p, \varepsilon) = \sphericalangle p + \varepsilon/2$ ,  $p, p - \varepsilon/2$  von  $c(p, r)$  ersetzt, so heißen die dadurch statt  $D$  und  $\underline{D}$  entstehenden Limites  $D_\varepsilon(p, M)$  und  $\underline{D}_\varepsilon(p, M)$  die obere bzw. untere Dichte von  $M$  in  $p$  im Sektor  $s(p, \varepsilon)$ . Nun beweist Verf. den Satz: In jeder in obigem Sinne meßbaren irregulären Menge  $M$  ist in fast jedem Punkte  $p$  für jedes  $\varepsilon < \pi$   $D_\varepsilon(p, M) = 0$  (für  $\varepsilon > \pi$  wäre der Satz falsch, für  $\varepsilon = \pi$  ist die Frage offen). Eine Folgerung aus dem Satze ist die von G. W. Morgan vermutete Eigenschaft der irregulären  $M$ : für fast jeden Punkt  $p$  von  $M$  gibt es keine Richtung  $\vec{p}\vec{q}$ , in der  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{D}_\varepsilon(p, M) \neq 0$  wäre. B. Knaster (Warszawa).

**Frink jr., Orrin:** Differentiation of sequences. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 553—560 (1935).

From the theorems contained in this paper we mention as examples the two following: 1. If a sequence (I)  $\{f_n(x)\}$  converges to  $f(x)$  on the closed interval  $[a, b]$ , and the derivatives  $f'_n(x)$  exist on  $[a, b]$  and the sequence of derivatives (II)  $\{f'_n(x)\}$  is uniform at  $x_0$  in  $[a, b]$ , then  $f'(x_0)$  exists and is equal to  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0)$ . If (II) is uniform at every point of  $[a, b]$ , then (II) converges uniformly to  $f'(x)$  on  $[a, b]$ . (A sequence  $\{g_m(x)\}$  is uniform at  $x_0$ , if for every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta > 0$  and an  $N$  such that if  $|x - x_0| < \delta$  and  $m > N$  and  $n > N$ , then  $|g_m(x) - g_m(x_0) - g_n(x) + g_n(x_0)| < \varepsilon$ .) 2. If (I)  $\{f_n(x)\}$  converges to  $f(x)$  on  $[a, b]$ , and the derivatives  $f'_n(x)$  exist and are summable on  $[a, b]$  and the sequence (II)  $\{f'_n(x)\}$  converges in the mean on  $[a, b]$ , then a necessary and sufficient condition that  $f'(x)$  exist, be continuous on  $[a, b]$  and be the limit of (II) on  $[a, b]$  is that (II) be almost normal at every point of  $[a, b]$ . (A sequence  $\{g_m(x)\}$  is almost normal at  $x_0$ , if for every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta > 0$  such that if  $|x - x_0| < \delta$ , then  $|g_m(x) - g_m(x_0)| < \varepsilon$  for almost all  $m$ .) *J. Ridder.*

**Izumi, Shin-ichi:** On the Verblunsky's generalization of the Denjoy integrals. *Sci. Rep. Tôhoku Univ.*, I. s. **24**, 344—351 (1935).

In this note two integrations are considered, which may be defined by a constructive Denjoy-, a descriptive Denjoy- and a Perron-form of definition. The descriptive Denjoy-definition of one of these is:  $F(x)$  is an integral (after this definition) of a function  $f(x)$  over  $(a, x)$  [for  $a < x \leq b$ ] if: (1)  $F(a) = 0$ , (2)  $F(x)$  is the finite approximate derivative of an (approximately continuous) function, (3)  $(a, b)$  is the sum of an enumerable set of perfect sets  $P_k$  and of an enumerable point set, such that  $F(x)$  is absolutely continuous on each  $P_k$ , (4) there exists a subset  $H$  of  $(a, b)$ , with  $m(H) = 0$ , such that for  $x \in (a, b) - H$  the approximate derivative of  $F(x)$  exists and is equal to  $f(x)$ . If the condition (2) is changed into: " $F(x)$  is the finite derivative of a (continuous) function", the descriptive form of an integral-definition of Verblunsky [Fundam. Math. **23**, 193—236 (1934); this Zbl. **10**, 19] is obtained. *J. Ridder.*

**Burkill, J. C.:** The Cesàro-Perron scale of integration. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **39**, 541—552 (1935).

Definitions: 1. The  $r$ -th Cesàro mean of  $f(x)$  in  $(x, x+h)$  is defined by 
$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-\xi)^{r-1} f(\xi) d\xi$$
, where the integral is taken in the  $C_{r-1}P$  sense and  $r$  may be  $1, 2, \dots$ ; the Cesàro mean of order 0,  $C_0(f, x, x+h)$ , will be  $f(x+h)$ . 2.  $f(x)$  is  $C_r$ -continuous at  $x_0$  if  $C_r(f, x_0, x_0+h)$  tends to  $f(x_0)$  as  $h$  tends to zero. 3. The  $r$ -th lower and upper Cesàro derivatives of  $f(x)$  at  $x_0$ ,  $C_r D_* f(x_0)$  and  $C_r D^* f(x_0)$ , are respectively defined by the lower and upper limit of  $\frac{C_r(f, x_0, x_0+h) - f(x_0)}{h/r + 1}$  for  $h$  tending to zero.

Taking as  $C_0P$  integral the special Denjoy integral, the author defines, by induction, the  $C_rP$  integral for any positive integral value of  $r$ . The  $C_r$ -major functions  $\{M(x)\}$  of a function  $f(x)$  in the interval  $(a, b)$  have the following properties: 1. every  $M(x)$  is  $C_r$ -continuous, 2.  $M(a) = 0$ , 3.  $C_r D_* M(x) > -\infty$ , 4.  $C_r D_* M(x) \geq f(x)$ ; the  $C_r$ -minor functions have corresponding properties; from  $C_r$ -major functions and  $C_r$ -minor functions the  $C_r$ -integral of  $f(x)$  is derived by Perron's method. [Cf. Burkill, *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **34**, 314—322 (1932); this Zbl. **5**, 392.] — The introduction of the point(?)-function  $f_r(x+h)$  on p. 544 was not clear to the Ref.

*J. Ridder (Groningen).*

**Morrey jr., Charles B.:** An analytic characterization of surfaces of finite Lebesgue area. *I. Amer. J. Math.* **57**, 692—702 (1935).

A set of equations  $x^i = x^i(u, v)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , where these functions are supposed to be continuous in a Jordan region of the  $(u, v)$ -plane, defines a continuous



surface  $S$  in  $n$ -dimensional Euclidean space. Such a surface is called non-degenerate if it possesses a non-degenerate representation, that is to say a representation such that on no continuum, consisting of more than two points, do all the coordinate functions  $x^i(u, v)$  reduce to constants. A representation  $x^i = x^i(u, v)$  of  $S$  is called generalized conformal if the following conditions are satisfied. (1)  $x^i(u, v)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , is absolutely continuous in the sense of Tonelli. (2)  $|x_u^i|^2, |x_v^i|^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , are summable. (3)  $E = G, F = 0$  almost everywhere ( $E, F, G$  being given by their usual formulas). The author states then his main result as follows. A necessary and sufficient condition that a non-degenerate continuous surface be of finite Lebesgue area is that it possess a generalized conformal representation on the closed unit circle.

*Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

## Analysis.

**Lévy, Paul:** Sur une classe de courbes sans tangentes analogues à celle de H. von Koch. Bull. Sci. math., II. s. 59, 237—246 (1935).

Eine der H. v. Kochschen ähnliche Konstruktion von stetigen Funktionen, die nirgends einer vorgegebenen Lipschitzbedingung genügen. *Rogosinski*.

**Popruzenko, J.:** Sur certaines inégalités arithmétiques. Wiadom. mat. 38, 69—95 u. franz. Zusammenfassung 96—98 (1935) [Polnisch].

L'A. démontre d'une manière très simple quelques inégalités connues. Citons par exemple celle-ci:

$$x_1^{\frac{c_1}{c_1+c_2}} x_2^{\frac{c_2}{c_1+c_2}} \leq \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{c_1 + c_2} \leq x_1^{\frac{c_1 x_1}{c_1 x_1 + c_2 x_2}} x_2^{\frac{c_2 x_2}{c_1 x_1 + c_2 x_2}}.$$

*Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Szilágyi, Emerich:** Iteration von Mittelwertfunktionen. Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen H. 10, 1—15 u. dtsh. Zusammenfassung 16—20 (1935) [Ungarisch].

**Dushnik, Ben:** A generalization of the derivative of a function. Amer. Math. Monthly 42, 414—419 (1935).

Elementare Überlegungen über den durch

$$f_\alpha(x_0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f[\alpha(x_0, z)] - f[\alpha(x_0, 0)]}{\alpha(0, z)}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \alpha(0, z) = 0$$

definierten Begriff einer verallgemeinerten Ableitung. *Rogosinski* (Königsberg).

**Dunford, Nelson:** On a theorem of Plessner. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 356—358 (1935).

Brief proof, based on ideas contained in articles on this subject by Plessner, Wiener and Young, and Ursell, of the theorem, that if  $f(t)$  is a real, periodic function of period  $2\pi$  and of bounded variation, it is absolutely continuous if the total variation of  $f(t+u) - f(t)$  on every interval of length  $2\pi$  tends to zero with  $u$ .

*Blumberg* (Columbus).

## Reihen:

**Fejér, Leopold:** Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge und ihre Legendrepolynome. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 307—316 (1935).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$  mit totalmonotonen Koeffizientenfolgen  $\{\alpha_n\}$  sowie der zugehörigen „Legendrepolynome“

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \cos(n-2k)\theta.$$

Es sei  $|z| < 1$ ,  $\Im z \geq 0$ ; dann bilden die Werte  $\Re(\alpha_n + \alpha_{n+1}z + \dots)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , eine totalmonotone Folge. Das gleiche gilt für den imaginären Teil sowie für die Quadratsumme der beiden. Die entsprechenden Argumente sind ferner monoton wachsend und haben einen leicht angebbaren Grenzwert. — Bezüglich der  $P_n$  wird, unter der besagten Voraussetzung, eine sehr elegante Nullstellenabgrenzung gegeben

(die Nullstellen sind alle reell und verschieden — ein älteres Resultat des Ref.): Die in das Intervall  $0 < \theta \leq \pi/2$  fallenden Nullstellen liegen im Innern der Intervalle

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n}, \quad k \frac{\pi}{n+1}; \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

(Für ungerades  $n$  reduziert sich das letzte Intervall auf den Punkt  $\pi/2$ , der eine Nullstelle ist.) Für den Spezialfall der gewöhnlichen Legendreschen sowie der ultrasphärischen Polynome (im „Hauptfalle“) ist dieses Resultat auf anderen komplizierteren Wegen von A. Markoff und Stieltjes bewiesen worden. — Ein anderes bemerkenswertes Resultat ist, daß unter der obigen Voraussetzung über die  $\alpha_n$  die arithmetischen

Mittel erster Ordnung der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta)$  für jedes reelle  $\theta$  nichtnegativ sind. —

Für die Nullstellen des trigonometrischen Polynoms

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k + \alpha_{n-k}) \cos(n-2k)\theta$$

gilt ferner der gleiche Realitäts- und Abschätzungssatz wie für die von  $P_n$ .

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Cesco, R. P.:** Sur un théorème de la théorie des séries divergentes. Bull. Sci. math., II. s. 59, 260—263 (1935).

Dans un récent Mémoire (v. ce Zbl. 8, 154) M. Rey-Pastor a établi par un exemple qu'il existe des „algorithmes de sommation“  $S$  (terminologie de M. Rey-Pastor) à matrice  $\|\mu_r(t)\|$ , qui sont réguliers sans que „l'algorithme de convergence“ correspondant  $C$  à matrice  $\|\lambda_r(t)\|$ , avec  $\lambda_r(t) = \mu_r(t) - \mu_{r+1}(t)$ , le soit. L'auteur voudrait démontrer la fausseté de cet exemple en montrant que la régularité de  $S$  entraîne celle de  $C$ . Toutefois à un certain moment, au lieu de démontrer l'existence

de la limite de  $s_n = \sum_{r=0}^n S_r \lambda_r(t)$  pour  $n \rightarrow \infty$ , il démontre l'existence de la limite de  $s_n^* = \sum_{r=0}^n S_r \lambda_r^{(n)}(t)$ , avec  $\lambda_r^{(n)}(t) = \lambda_r(t)$  pour  $r < n$ , et  $\lambda_n^{(n)}(t) = \mu_n(t)$ , ce qui prive son

raisonnement de toute valeur probante quant à la régularité de  $C$ . — On constate d'ailleurs facilement en appliquant mutatis mutandis le raisonnement de l'auteur à la somme  $s_n$  (et non à  $s_n^*$ ), que le procédé  $C$  est ou n'est pas régulier, suivant que

l'on ait  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r(t) = 1$  ou non, c.-à-d. suivant que l'algorithme  $C$  satisfait ou non à la 3-me condition de régularité des „algor. de conv.“, les deux suppositions étant également compatibles avec la régularité de  $S$ .

Observation: Pour éviter un malentendu possible il n'est pas inutile de spécifier que les réserves faites en ce Zbl. (loc. cit.) ne se rapportaient pas à l'exemple ci-dessus, mais aux conséquences que M. R.-P. en déduit.

Vlad. Bernstein (Milano).

**Wang, Fu Traing:** On the convergence factor of Fourier series at a point. Tôhoku Math. J. 41, 91—108 (1935).

Among the results established in this paper, the following deserves attention. Let  $f(x)$  be a function of period  $2\pi$ , and integrable  $L$  over  $(0, 2\pi)$ . Let

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

At every point  $x$  where  $f(x)$  is the symmetric derivative of its integral, the series  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) n^{-\frac{1}{2}}$  converges. The exponent  $\frac{1}{2}$  cannot be replaced by anything smaller.

A. Zygmund (Wilno).

**Takahashi, Tatsuo, and Fu Traing Wang:** Some notes on trigonometric series. Tôhoku Math. J. 41, 169—187 (1935).

The paper contains a number of theorems which are analogues, for conjugate series, of certain results previously established for Fourier series. For example:



(1) Let  $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ ,  $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$ . At every point  $x$  where  $\int_0^t |\psi(t)|^p dt = O(t)$  ( $p \geq 1$ ), the series  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$ , conjugate to the Fourier series of  $f(x)$ , is either summable  $(C, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , or summable by no Cesàro mean. A necessary and sufficient condition for summability is the convergence of the integral  $\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} dt$ . (2) Let  $\varphi(t)/t$  be integrable  $L$  in the neighbourhood of  $t = 0$ . A necessary and sufficient condition that the series  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  should be summable  $(C, k)$  ( $k \geq 1$ ) for  $t = x$ , is that the series conjugate to the Fourier series of the function  $\varphi(t)/t$  should be summable  $(C, k-1)$  at  $t = 0$  [cf. Hardy and Littlewood, J. London Math. Soc. 6, 9—12 (1931), this Zbl. 1, 273; F. T. Wang, Tôhoku Math. J. 39, 107—110 (1934), this Zbl. 9, 109]. The second part of the paper contains applications of M. Riesz's logarithmic means to the summation of conjugate series.

A. Zygmund (Wilno).

**Takahashi, Tatsuo:** Note on the integrability of sum function of a trigonometric series. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 335—343 (1935).

Let  $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ,  $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$ , and let  $\bar{P}(x)$  and  $\underline{P}(x)$  denote the upper and the lower Abel sums of the series  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ . It was shown by Verblunsky [J. London Math. Soc. 6, 106—113 (1931); this Zbl. 1, 331] that if (1)  $\underline{P}(x) \geq 0$  for  $a \leq x \leq b$ , (2)  $|a_n| + |b_n| = O(1)$ , (3)  $\sum B_n(x)/n$  converges for  $x = a$  and  $x = b$ , then  $\underline{P}(x)$  is integrable  $L$ . Using Verblunsky's method, the author generalizes the result, replacing (1) and (2) by (1')  $\bar{P}(x) \geq 0$ ,  $\underline{P}(x) > -\infty$  for  $a \leq x \leq b$ , (2')  $|a_n| + |b_n| = o(n)$ , and adding the hypothesis that  $\sum_1^n A_k(x) = O(n)$  for  $x = a$  and  $x = b$ . The theorem holds if, instead of Abel's, we consider Riemann's method of summation.

A. Zygmund (Wilno).

**Fekete, Michael:** Some generalizations of Paley's theorems on Fourier series with positive coefficients. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 237—249 (1935).

$f(x)$  sei eine  $L$ -integrierbare Funktion der Periode  $2\pi$ ;  $a_n, b_n$  seien ihre Fourierkoeffizienten. — Paley [J. London Math. Soc. (2) 13 (1914); vgl. Fekete, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935); dies. Zbl. 11, 157] bewies, daß, wenn die Fourierkoeffizienten den Ungleichungen

$$a_n \geq -\frac{1}{n}; \quad b_n \leq -\frac{1}{n}$$

genügen, die Teilsummen der Fourierreihe eines beschränkten  $f(x)$  gleichmäßig beschränkt bleiben, während die Fourierreihe eines stetigen  $f(x)$  dann gleichmäßig konvergiert. — Verf. beweist nun, daß die Paleysche Koeffizientengleichung durch

$$a_n \geq -\alpha_n; \quad b_n \geq -\beta_n; \quad \alpha_n > 0, \beta_n > 0$$

ersetzt werden kann, wenn die Reihen  $\sum \alpha_n$  und  $\sum \beta_n$  „langsam divergieren“. Es genügt aber auch, daß die Reihen  $\sum \alpha_n \cos nx$  und  $\sum \beta_n \sin nx$  gleichmäßig „langsam oszillieren“. Wegen der Definition dieser Begriffe sei auf die Arbeit verwiesen; übrigens müssen bei beschränktem bzw. stetigem  $f(x)$  zwei verschiedene diesbezügliche Definitionen gewählt werden. Schließlich erweist sich das langsame Oszillieren von  $\sum a_n \cos nx$  und  $\sum b_n \sin nx$  als notwendig und hinreichend für das Paleysche Ergebnis, wobei wieder die beiden verschiedenen Definitionen des langsamen Oszillierens heranzuziehen sind.

Rogosinski (Königsberg i. Pr.).

**Obrechhoff, N.:** Sur la sommation des séries trigonométriques de Fourier et de la série de Laplace. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 30, 9—143 u. franz. Zusammenfassung 144—153 (1934) [Bulgarisch].

Ce travail fondamental précise les derniers points qui restaient à étudier dans

la théorie de sommabilité par les procédés  $(C, k)$  de moyennes arithmétiques où celui  $(R, n, k)$ , équivalent, de Riesz des séries trigonométriques de Fourier, ces séries dérivées terme à terme et leurs conjuguées. — Les méthodes ne présentent rien de nouveau mais les inégalités très précises relatives aux dérivées des moyennes arithmétiques des sommes partielles des séries-noyaux  $\frac{1}{2} + \sum \cos n\theta$  et  $\sum \sin n\theta$  sont nouvelles et leurs preuves basées comme toujours sur l'emploi de l'intégrale de Cauchy sont bien présentées. — A la fin l'auteur établit une inégalité nouvelle et importante relative aux dérivées des moyennes de la série divergente  $\sum (2n+1) P_n(\cos \gamma)$  qui sert de série — noyau dans les développements en série de Laplace

$$f(\theta, \varphi) \sim \sum \frac{2n+1}{4\pi} \iint_S f(\theta', \varphi') \cdot P_n(\cos \gamma) \cdot d\sigma'.$$

Cette inégalité lui permet d'étendre aux séries de Laplace les conditions suffisantes de sommabilité  $(C, k)$  les plus larges connues pour les séries de Fourier à condition d'augmenter d'un demi l'ordre des moyennes employées. *E. Kogbetliantz* (Téhéran).

**Higaki, Nobuaki: Some theorems on Riesz's method of summation.** Tôhoku Math. J. 41, 70—79 (1935).

Es werden 5 Sätze über die Inversion der  $R(\lambda_n, k)$ -Limitierbarkeit hergeleitet, welche teils vereinfachte Beweise, teils Verallgemeinerungen bekannter Sätze sind. — Sei  $C_k(\omega) = \sum_{\lambda_n \approx \omega} (1 - \lambda_n/\omega)^k u_n$  gesetzt, so wird (Satz I und II) einfach gezeigt, daß aus  $C_k(\omega) = O(1)$  {bzw.  $= o(1)$ } und  $\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu u_\nu = O(\lambda_n)$  {bzw.  $= o(\lambda_n)$ } (§) folgt  $\sum_{\nu=1}^n u_\nu = O(1)$  {bzw.  $= o(1)$ }. In diesem zweiten  $o$ -Inversionssatz wird noch (Satz III) für  $k=1$  und unter der Voraussetzung  $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$ , die Bedingung (§) durch  $\lambda_n u_n > O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$  ersetzt. — Der Satz IV gibt eine Verallgemeinerung eines Mordellschen Satzes [J. London Math. Soc. 3 (1928)] auf  $R(\lambda_n, 1)$ -Summen, während der Satz V aus der einseitigen Beschränktheit einer Reihe und der  $R(\lambda_n, k)$ -Summierbarkeit die  $R(\lambda_n, 1)$ -Summierbarkeit behauptet, falls  $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$  vorausgesetzt wird. *Karamata*.

**Higaki, Nobuaki: Remarks on Hardy's convergence theorem.** Tôhoku Math. J. 41, 80—90 (1935).

Es werden zwei Sätze von Hardy [Notes on some points in the integral calculus (LX) Mess. of Math. 54 (1925)] über Reihen mit positiven Gliedern ergänzt und die ihnen entsprechenden Sätze auf Integrale übertragen. So wird z. B. gezeigt, daß im Hardyschen Satze: „Ist  $k > 1$ ,  $\lambda_n \geq 0$ ,  $a_n \geq 0$  und  $\sum \lambda_n a_n^k$  konvergent, so ist  $\sum \lambda_n \varrho_n^k \leq k \sum \lambda_n a_n \varrho_n^{k-1} \leq k^k \sum \lambda_n a_n^k$ , wo  $\varrho_n = \frac{\lambda_n a_n}{A_n} + \frac{\lambda_{n+1} a_{n+1}}{A_{n+1}} + \dots$  und  $A_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n > 0$  ist.“  $\varrho_n$  durch  $\frac{\lambda_1 a_1}{A_1} + \frac{\lambda_2 a_2}{A_2} + \dots + \frac{\lambda_n a_n}{A_n}$  und  $A_n$  durch  $\lambda_n + \lambda_{n+1} + \dots > 0$  ersetzt werden kann, wie auch, daß die entsprechenden Integralsätze gültig sind, wenn  $a_n$  durch  $a(x)$ ,  $\lambda_n$  durch  $\lambda(x)$  und  $\sum$  durch  $\int$  ersetzt wird. *Karamata* (Beograd).

**Takahashi, Tatsuo: A note on inequalities.** Tôhoku Math. J. 41, 148—150 (1935).

Der im vorstehenden Referat genannte Satz von Higaki wird für  $0 < k < 1$  betrachtet und gezeigt, daß dann nur  $\sum \lambda_n \varrho_n^k \leq k^k \sum \lambda_n a_n^k$  und  $\sum \lambda_n \varrho_n^k \leq k \sum \lambda_n a_n \varrho_n^{k-1}$  wird, daß aber im allgemeinen  $k \sum \lambda_n a_n \varrho_n^{k-1} \geq k^k \sum \lambda_n a_n^k$  sein kann. *Karamata*.

### Differentialgleichungen:

**Gauster, W.: Über den Heaviside-Kalkül.** Z. angew. Math. Mech. 15, 309—310 (1935).

**Vahlen: Erwiderung.** Die Differentialgleichung (Bd. 13, S. 293). Z. angew. Math. Mech. 15, 310—311 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 7, 208.



**Ritt, J. F.:** Systems of algebraic differential equations. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 293—302 (1935).

In this paper the author gives a second elimination theory for finite systems of algebraic differential equations (see Ritt, *Differential equations from the algebraic standpoint*, in particular this paper uses Chapter IV). In this theory the starting point is the classical device of replacing the given system by one each of whose differential polynomials is of order at most unity in the unknowns. Such a system is shown to be equivalent to a finite set of systems each essentially in the Jacobi-Weierstrass normal form. Algebraic reducibility accounts in part for the multiplicity of the final representation. Again, a system which is indecomposable, regarded as a system of polynomials in the unknowns and their derivatives, may, for example, become decomposable when it is necessarily enlarged by the inclusion of certain forms which can be derived by differentiation and which algebraically further condition the unknowns. Or again, in solving for the derivatives, certain solutions which are solutions, for example, of the algebraic equations and their separants must be provided for in an additional system. The systems of the final representation are irreducible regarded as systems of differential equations; hence the theory provides a new proof of the author's decomposition theorem for finite systems. This theory of elimination, inadequate for certain results which the author has obtained from his earlier theory, leads in a second part of this paper to a general theorem on the order of a finite system of algebraic differential equations. The need for such a theorem is apparent when the concept is defined and found to be relative to the particular system of the decomposition and the choice of arbitrary unknowns. The bound obtained is the sum of the maxima for each form of the orders in each unknown which is not arbitrary.

*Raudenbush* (New Haven).

**Ritt, J. F.:** Jacobi's problem on the order of a system of differential equations. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 303—312 (1935).

Given a system of differential equations  $u_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  in the unknowns  $y_1, \dots, y_n$  and the independent variable  $x$ , let  $a_{ij}$  denote the order of  $u_i$  in  $y_j$ . Jacobi stated that the number of arbitrary constants in the solution of the system does not exceed the maximum of the sums  $a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_n j_n}$  where  $j_1, \dots, j_n$  is a permutation of  $1, \dots, n$ . Except in the case of linear systems with constant coefficients, the arguments advanced by Jacobi and others as proofs are, as the author points out, not rigorous nor, apparently, can they be made rigorous by easy interpolations. On the other hand, Jacobi's bound is a better bound than that obtained by the author in an earlier paper (prev. ref.) for systems of algebraic differential equations. In the present paper the author establishes Jacobi's bound first for linear systems with variable coefficients, in which case the proof is complete in this paper, and secondly for systems of two algebraic differential equations. In the latter case, if an essential irreducible system (Ritt, *Differential equations from the algebraic standpoint*) in the decomposition of the given system has no arbitrary unknowns, then the order of the irreducible system is shown not to exceed the Jacobi bound. *Raudenbush*.

**Pfeiffer, G.:** Sur une méthode spéciale d'intégration des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 201, 495—497 (1935).

Développement des idées de l'auteur, appliquées dans les mémoires précédents (ce Zbl. 8, 66). Va être publié plus en détail. *Janczewski* (Leningrad).

**Panov, D.:** Sur une méthode de résolution des problèmes limites pour les équations différentielles aux dérivées partielles. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 3, 63—66 (1935).

Die hier dargelegte und schon früher von Dunkan und Tschapliguin angegebene Methode betrifft ähnliche Probleme wie die Randwertaufgabe des Torsionsproblems bei symmetrischen Profilen, wo eine Lösung von  $\Delta\psi = -2$  gesucht wird, die für  $y - \lambda^2 f(x) = 0$  verschwindet. Es wird für die nach Potenzen von  $\lambda$  fort-

schreitende Potenzreihe ein Konvergenzbeweis angekündigt. Im Anschluß daran ergibt sich  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int \int \psi(xy) dx dy}{J} = 2$ , wo  $J$  das Trägheitsmoment des Profils um die  $x$ -Achse bedeutet. Funk (Prag).

**Petrowsky, J.:** Über die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 55—59 (1934).

Unter Skizzierung des Beweisgedankens teilt Verf. die Resultate mit, die er in seiner inzwischen erschienenen Arbeit „Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung“ [Compositio Mathematica 1 (1935); dies. Zbl. 10, 299] ausführlich dargestellt und bewiesen hat. E. Rothe (Breslau).

**Slioskin, N.:** Lösung der Gleichung  $D^k \psi = 0$ . Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 91—94 u. deutsch. Zusammenfassung 94 (1934) [Russisch].

Es wird eine partikuläre und nachher eine allgemeine Lösung der Gleichungen  $D^k \psi = 0$  und  $\Delta^k \varphi = 0$  mittels der bekannten Lösungen von  $D\psi = 0$  und  $\Delta \varphi = 0$  aufgebaut  $\left[ D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]$ . Janczewski (Leningrad).

**Maria, Alfred J., and Robert S. Martin:** On the representation of positive harmonic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 513—514 (1935).

Kurze vorläufige Mitteilung über die Darstellung der in einem gegebenen Bereiche  $A$  positiven harmonischen Funktionen als „Stieltjes-Radonsche Integrale“. Der Bereich  $A$  hat eine Reihe von Bedingungen zu erfüllen, die z. B. alle bestehen, wenn der Rand von  $A$  aus endlich vielen Jordanschen Kurven zusammengesetzt ist. Eine ausführlichere Mitteilung wird in Aussicht gestellt. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

### Spezielle Funktionen:

**Bailey, W. N.:** Some expansions in Bessel functions involving Appell's function  $F_4$ . Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 233—238 (1935).

Verf. beweist zwei Entwicklungen für  $z^{\mu-\nu} J_\mu(az) J_\nu(bz)$ , die nach den Funktionen  $J_{\kappa+2n}(z)$  bzw.  $z^\nu J_{\kappa+n}(z)$  fortschreiten,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , und deren Koeffizienten sich durch die Appellsche Funktion  $F_4$  darstellen lassen. Nach Spezialisierung der Parameter ergeben sich verschiedene ältere Resultate von Bateman, Fox usw. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Bailey, W. N.:** Some infinite integrals involving Bessel functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 37—48 (1935).

Beide Integrale

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} J_\mu(at) J_\nu(bt) K_\varrho(ct) dt, \quad \int_0^\infty t^{\mu-1} J_\mu(at) J_\nu(bt) J_\varrho(ct) dt$$

werden durch die Appellsche hypergeometrische Funktion  $F_4$  von zwei Veränderlichen ausgedrückt. Es werden ferner Spezialfälle behandelt, in denen  $F_4$  sich durch Funktionen vom einfacheren Typus darstellen läßt. Verf. gewinnt auf diese Weise eine einheitliche Darstellung von älteren Resultaten sowie verschiedene neue Formeln. Schließlich folgt die Berechnung eines Integrals, das eine beliebige endliche Anzahl von  $J_\mu(at)$  (mit verschiedenen  $\mu$  und  $a$ ) enthält und gewisse Integrale von Nicholson, Gegenbauer und Klyuyver verallgemeinert. G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Zia-ud-Din, M.:** On some relations in Mathieu functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 182—185 (1935).

Following similar work by E. T. Whittaker [J. London Math. Soc. 4, 88—96 (1929)], relations are obtained connecting

$$se'_n i\xi, se_n i\xi \text{ with } ce_{n-1} i\xi \text{ and } ce_{n+1} i\xi,$$

and further relations connecting

$$ce'_n i\xi, ce_n i\xi \text{ with } se_{n-1} i\xi \text{ and } se_{n+1} i\xi.$$

W. N. Bailey.



Meijer, C. S.: Integraldarstellungen für Lommelsche und Struvesche Funktionen. (II. Mitt.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 744—749 (1935).

Der Verf. beweist die beiden schon in der ersten Mitteilung (dies. Zbl. 11, 355) angegebenen Integraldarstellungen:

$$S_{\mu, \nu}(z) = \frac{2^\mu}{z} \int_0^{\infty} e^{-v + \frac{z^2}{8v}} W_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu} \left( \frac{z^2}{4v} \right) v^{\frac{1}{2}\mu} dv$$

und

$$S_{\mu, \nu}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)} z^{\frac{1}{2}(\mu-\nu-1)}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)} \int_0^{\infty} e^{-v + \frac{z^2}{8v}} W_{\frac{1}{2}(\mu+\nu-1), \frac{1}{2}(\mu+\nu+1)} \left( \frac{z^2}{4v} \right) v^{-\frac{1}{2}(\mu-3\nu+3)} dv.$$

In diesen beiden Relationen ist  $|\arg z| < \pi$  und

$$\text{Max}(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi + 2\arg z) < \tau < \text{Min}(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi + 2\arg z).$$

In der letzten Relation wird überdies angenommen, daß  $\Re(\mu - \nu) < 1$  ist. Weiter wird die Struvesche Funktion:

$$H_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} \Gamma(\frac{3}{2} + m) \Gamma(\frac{3}{2} + \nu + m)}$$

im Anschluß an

$$L_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{2^{2m} \Gamma(\frac{3}{2} + m) \Gamma(\frac{3}{2} + \nu + m)}$$

betrachtet. Der Verf. gibt mehrere Integraldarstellungen für diese Funktionen, u. a.

$$I_\nu(z^2) - L_\nu(z^2) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} K_\nu(v^2) J_{2\nu}(2zv) v dv$$

und

$$I_\nu(z^2) - L_\nu(z^2) = \frac{4}{\pi z} \int_0^{\infty} K_{\nu+1}(v^2) J_{2\nu+1}(2zv) v^2 dv,$$

wo  $\nu$  und  $\arg z$  beliebig sind.

S. C. van Veen (Dordrecht).

Banerjee, D. P.: On the expansion of a function in a series of parabolic cylindrical functions of unrestricted order. Indian Phys.-Math. J. 6, 45—48 (1935).

Fisher, E.: Asymptotic representations of confluent hypergeometric functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 529—533 (1935).

Die Funktion  $F_{k,m}(z) = z^{-k} e^{\frac{z}{2}} W_{k,m}(z)$  [wo  $W_{k,m}(z)$  die Whittakersche Funktion bedeutet] genügt den rekurrenten Beziehungen

$$\frac{m^2 - (k - \frac{1}{2})^2}{z^2} F_{k-1,m} + \left(1 - \frac{2k}{z}\right) F_{k,m} = F_{k+1,m} \quad (1)$$

und

$$\frac{d}{dz} F_{k,m} = \frac{(k - \frac{1}{2})^2 - m^2}{z^2} F_{k-1,m}. \quad (2)$$

Unter der Annahme  $|z| \gg |k|, 1$  wird (1) als Differenzengleichung nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen gelöst. Der Verf. findet eine Reihe der folgenden Gestalt

$$\frac{F_{k-1,m}}{F_{k,m}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}, \quad (3)$$

wo die Größen  $A_n$  ziemlich verwickelte rationale Funktionen von  $k$  und  $\sqrt{1 + \frac{4m^2}{z^2}}$  bedeuten. Die expliziten Ausdrücke für  $A_0, A_1$  und  $A_2$  werden angegeben. Aus (2) folgt durch Integration eine asymptotische Entwicklung von  $\ln\{F_{k,m}(x)\}$  für große Werte von  $x$ . Ohne Beweis wird das Endergebnis der dritten Approximation unter

Benutzung des vierten Koeffizienten  $A_3$  aus (3) angegeben und auf

$$J_n(x) = (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \{e^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\pi i} W_{0,n}(2ix) + e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\pi i} W_{0,n}(-2ix)\}$$

angewendet. Restgliedabschätzungen werden nicht vorgenommen. — In analoger Weise wendet der Verf. sein Verfahren für  $|m| \gg |k|, 1$  auf die Funktion  $N_{k,m}(z) = z^{-\frac{1}{2}-m} M_{k,m}(z)$  an, wo  $M_{k,m}(z)$  die mit der Whittakerschen Funktion nahe verwandte Kummersche Funktion bedeutet. (Siehe Whittaker-Watson, Modern Analysis, Chap. XVI.) Endlich werden analoge Ergebnisse erhalten im Fall  $|z| \gg |m|, 1$ .

S. C. van Veen (Dordrecht).

### **Funktionentheorie :**

**Robertson, M. S.:** On the coefficients of a typically-real function. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 565—572 (1935).

Im engen Anschluß an Rogosinski [Math. Z. **35**, 93 (1932); dies. Zbl. **3**, 393] gibt Verf. Koeffizientenabschätzungen für die Potenzreihen  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_1 = 1$ , welche in  $|z| < 1$  regulär sind, für welche ferner dort  $\operatorname{sg} \Im f(z) = \operatorname{sg} \Im z$  gilt. Er gewinnt Schranken für  $|a_n|$ ,  $\sum_{k=1}^n |a_k|$ ,  $\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \right|$ ,  $\sum_{k=1}^n \left| \frac{a_k}{k} \right|$ . — Sodann folgen Koeffizien-

tenabschätzungen für ungerade  $f(z)$ , welche Werte aus dem gleichen Quadranten annehmen, in dem  $z$  selbst gelegen ist. (Die Klasse der reellen und ungeraden schlichten Funktionen ist ein Spezialfall.)

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Nabetani, Kenjirô:** Some inequalities on moduli of analytic functions. Tôhoku Math. J. **41**, 109—124 (1935).

Verf. stellt obere Abschätzungen für die Ableitungen  $|f^{(n)}(z)|$  und für die Integralmittelwerte der  $p$ -ten Potenz derselben auf, wenn  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  in  $|z| < 1$  regulär ist und dort einer der folgenden Klassen angehört: a) schlicht, b) sternförmig, c) konvex, d) typisch-reell im Sinne von Rogosinski, e) ungerade und schlicht (bzw. sternförmig, konvex oder typisch-reell).

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Rios, Sixto:** Heutiger Stand der Theorie der Überkonvergenz. An. Asoc. españ. Progr. Ci. **1**, 472—484 (1934) [Spanisch].

**Chuang, Chi-Tai:** A generalization of a theorem of Montel. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A **3**, 215—220 (1935).

En suivant la marche indiquée par le Réf. (Bull. Sci. math. **1926**, 200; Mém. Sci. math. **38**, 15) l'auteur démontre ceci: Soit une suite de fonctions  $f_m(z)$  holomorphes pour  $|z| < 1$  et telles que, quel que soient  $m$  et  $\varphi$ ,  $\log |f_m(re^{i\varphi})| < AS \left( \frac{1}{1-r} \right)$  pour  $r_0 < r < 1$ ,  $A$  étant une constante et  $S(x)$  une fonction positive données. La suite  $f_m(z)$  converge uniformément à l'intérieur du cercle unité pourvu qu'elle converge en une suite de points  $z_n$  pour lesquels la série

$$\sum \left[ \frac{1 - r_n}{S \left( \frac{1 + \alpha}{1 - r_n} \right)} \right]^{1 + \varepsilon}, \quad r_n = |z_n|,$$

diverge;  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont des nombres positifs arbitraires. Pour  $S(x) = x^\sigma$  on retombe sur un th. de Montel (Leçons sur les familles normales, 184—187). Lorsque  $S(x)$  est à croissance normale au sens de Borel, on peut prendre  $\alpha = 0$ . Le Réf. signale en outre que, dans le cas général, on trouve au cours de la démonstration (p. 218) un résultat plus précis: il suffit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - r_n)/S \left( \frac{1 + \alpha}{1 - r_n} \right) = \infty$ . Valiron (Paris).

**Lee, K. P.:** On meromorphic functions of infinite order. Jap. J. Math. **12**, 37 bis 42 (1935).

L'auteur applique la méthode des fonctions type de Blumenthal à l'étude des fonctions introduites par Shimizu dans la théorie des fonctions méromorphes (Jap.



J. Math. 6, 122). Mais comme dans un article précédent (ce Zbl. 11, 406) il ne tire pas de la méthode tout ce qu'elle donne et ne généralise pas complètement les th. de Blumenthal. Par exemple, considérant  $A_1(r, f) = r^{\lambda(r)}$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \lambda(r) = \infty$ , il introduit une fonction  $\Omega(r)$  à croissance typique telle que  $\lambda(r) \leq \Omega(r)$  pour  $r$  assez grand et  $\Omega(r) < [\lambda(r)]^{1+\delta(r)}$  pour une suite de  $r$ ,  $\delta(r)$  étant un infiniment petit convenable; puis il énonce ce th.: on ne peut avoir pour tous les  $r$  assez grands  $A_1(r, f) < \Omega(r)^{1+\delta'(r)}$ , quel que soit l'infiniment petit donné  $\delta'(r)$ , ce qui est exact mais énormément moins précis que la propriété évidente  $\log A_1(r, f) > \Omega(r)^{1-\alpha} \log r$ ,  $\alpha$  positif arbitraire, pour des  $r$  tendant vers l'infini, qui est celle que l'on doit utiliser d'après Blumenthal.  
G. Valiron (Paris).

**Rauch, A.:** Remarques sur les fonctions algébroides entières. Bull. Sci. math. II. s. 59, 246—256 (1935).

Sei  $u(z)$  eine polfreie algebroides Funktion mit  $k$  Zweigen  $u_\kappa(z)$  und von der endlichen Ordnung  $\varrho$ ; ist es außerdem von der Divergenzklasse dieser Ordnung, so divergiert

$$\int \sum_{\kappa=1}^k \log^+ |u_\kappa(r e^{i\vartheta})| \frac{dr}{r e^{i\vartheta}} \quad (\vartheta \text{ fest})$$

immer nur in Winkelräumen  $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ , deren Breite  $\pi/\varrho$  nicht unterschreitet; für  $\varrho < 1/2$  also für alle  $\vartheta$ . Im Anschluß an Valiron (dies. Zbl. 2, 402): Der mittlere Grenzexponent zur Richtung  $\vartheta$  übertrifft nicht die zugehörige Richtungsordnung. Schließlich skizziert Verf. eine Übertragung des Inhalts der Arbeit von Milloux (dies. Zbl. 8, 75) auf subharmonische bzw. algebroides Funktionen. (Vgl. auch dies. Zbl. 11, 120.)  
Ullrich (Göttingen).

**Levinson, Norman:** On the closure of  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  and integral functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 335—346 (1935).

Soit  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ ,  $\lim \lambda_n = \infty$ . Soit  $D$  la densité maximum de la suite  $\{\lambda_n\}$ . L'auteur démontre le théorème suivant: I. Si,  $f(x)$  (fonct. compl. de la variab.

réelle) étant intégrable  $L$  dans  $(a, b)$ ,  $\int_a^b f(x) e^{-i\lambda_n x} dx = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $D > \frac{b-a}{2\pi}$ ,

$f(x)$  s'annule presque partout. Il en tire la conclusion suivante: II. Soit  $V_n$  une suite

d'entiers positifs et soit  $f(\theta) \sim \sum_1^\infty a_n e^{-iV_n \theta} + \sum_0^\infty a_n e^{iV_n \theta}$ . En désignant par  $V(u)$  le

nombre de quantités  $V_n$  inférieures à  $u$ , supposons que  $\lim_{\xi \rightarrow 1-0} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{V(u) - V(u\xi)}{u(1-\xi)} = 0$ .

Supposons enfin que  $\Phi(z)$  est holomorphe pour  $|z| < 1$  et que  $\int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta})| d\theta < A$

( $r < 1$ ). Dans ces conditions  $f(\theta) - \Phi(e^{i\theta})$  ne peut s'annuler dans un intervalle arbitrairement petit sans s'annuler presque partout. La démonstration de ce théorème est

basée sur le théorème suivant: Soit  $F(z)$  une fonction entière telle que  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |F(x)|}{1+x^2} dx < \infty$ ,

$\log |F(re^{i\theta})| < Ar$ . Soit  $n(r)$  le nombre de zéros de  $F(z)$  dans  $|z| < r$  et soit  $n(r, \theta)$  le nombre de zéros de  $F(z)$  dans le secteur  $|z| < r$ ,  $-\theta < \arg z < \theta$ ,  $0 < \theta < \pi$ .

Il existe une quantité  $B$  telle que pour  $r \rightarrow \infty$ , on ait  $\frac{n(r)}{r} \sim 2B$ ,  $\frac{n(r, \theta)}{r} \sim B$ . (On

pourrait comparer le résultat II à un résultat de l'auteur de cette analyse paru dans son Mémoire déposé à l'Académie des Sciences en décembre 1932 et publié en 1934 dans le J. Ecole polytechn., II. s. C. n° 32, 227; ce Zbl. 10, 61. Ce résultat a été également publié dans les C. R. Acad. Sci., Paris 198; ce Zbl. 8, 254.)  
Mandelbrojt.

**Leja, F.:** Construction de la fonction analytique effectuant la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle. *Math. Ann.* **111**, 501—504 (1935).

$D$  est un domaine simpl. connexe du plan de la var.  $x$ . On suppose que  $x = 0$  est un point int. de  $D$ .  $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_n$  étant  $n+1$  points de la frontière  $F$  de  $D$ , on pose  $U(\xi_0, \dots, \xi_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} \left| \frac{1}{\xi_j} - \frac{1}{\xi_k} \right|$ . Soient  $x_0, \dots, x_n$  les valeurs des  $\xi$  qui réalisent le max.

de  $U$ . Soit  $u_j = \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_j} \right) \dots \left( \frac{1}{x_{j-1}} - \frac{1}{x_j} \right) \left( \frac{1}{x_{j+1}} - \frac{1}{x_j} \right) \dots \left( \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_j} \right)$ ,  $j = 0, 1 \dots n$ ,

et supposons que  $u_0 \leq u_j$  ( $j = 1, 2 \dots n$ ). Posons  $\varphi_n(x) = \frac{x}{x_0} \sqrt[n]{\frac{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}{(x - x_1) \dots (x - x_n)}} \cdot e^{\theta_n i}$ ,

où  $\theta_n$  est tel que pour un point  $x = a$  intérieur à  $D$ , le radical ait pu être choisi de sorte que  $\varphi_n(a) > 0$ . L'auteur démontre que  $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  = fonction holomorphe dans  $D$ , que  $y = \varphi(x)$  effectue la représentation conforme de  $D$  sur  $|y| < 1$  de manière que  $y(0) = 0$ , et que l'image de  $x = a$  se trouve sur le rayon positif du cercle  $|y| < 1$ . *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Sonnenschein, Helmut:** Über einige konforme Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. Leipzig: Diss. 1935. 48 S.

Auf  $n$  außerhalb einander gelegenen Kreisen ist eine endliche Anzahl von punktfremden Bogen gegeben. Die längs dieser Bogen aufgeschlitzte Ebene soll auf ein Kreisgebiet abgebildet werden, in solcher Weise, daß die Kreise, welche den auf derselben Peripherie gelegenen Schlitten entsprechen, einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen. Diese Aufgabe, sowie eine durch Grenzübergang hervorgehende ähnliche Aufgabe, hat im wesentlichen nur eine Lösung, und dieselbe kann durch Anwendung des algebraischen Iterationsverfahrens von Koebe ermittelt werden. *L. Ahlfors*.

**Chen, Kien Kwong:** Contributions to the theory of schlicht functions. *Tôhoku Math. J.* **41**, 125—147 (1935).

Citons les théorèmes suivants de l'A.: Si  $g(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$  est une fonction univalente pour  $|z| > 1$ , et si  $zz' = 1$ , on a  $|g(z) - (z - \bar{z}')| \leq 2|z'|$  ( $|z| > 1$ ). Si  $\varphi(z) = \frac{1}{z} + b_m z^m + b_{m+1} z^{m+1} \dots$  est une fonction univalente pour  $0 < |z| < 1$ ,  $|g(z) - \frac{1 - r^{m+1}}{z}| \leq 2r^m$  ( $0 < |z| = r < 1$ ). *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Laurentiev, M.:** Sur quelques propriétés des fonctions univalentes. *C. R. Acad. Sci. URSS* **1**, 1—2 u. franz. Text 2—4 (1935) [Russisch].

The author studies the correspondence of boundaries in conformal representation. If  $C$  is a closed simple analytic curve in the  $z$ -plane, then  $\alpha(t)$  will denote the angle which the tangent to  $C$  at the point  $z = t$  makes with the positive axis of reals. Denote by  $m(C)$  the greatest lower bound and by  $M(C)$  the least upper bound of  $\alpha(t)$  as  $t$  describes  $C$  in the positive sense, where the initial value of  $\alpha(t)$  is taken to lie between 0 and  $\pi$ . Let  $D$  be an arbitrary simply connected region in the  $z$ -plane with boundary  $\Gamma$ .  $D$  will be said to belong to class  $R(m, M)$  if for every closed subregion  $\bar{D}_1$  of  $D$ , there exists a closed simple analytic curve  $C$  interior to  $D$  and containing  $\bar{D}_1$  such that  $m \leq m(C) \leq M(C) \leq M$ . The author states: If  $D$  belongs to class  $R(m, M)$ , then in the conformal map  $w = f(z)$  of  $D$  on the circle  $|w| < 1$  (1) if either  $m$  or  $M$  is finite, a set of points  $E$  of linear measure 0 on  $\Gamma$  goes over into a set of 0 measure on  $|w| = 1$ ; (2) if both  $m$  and  $M$  are finite, and the linear measure of  $E$  is  $\leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , if  $D$  contains the circle  $|z| < 1$  and  $f(0) = 0$ , then  $E$  is carried into a set of measure  $\leq 2\pi\varepsilon^\delta$ , where  $\delta$  is a positive constant depending only on  $m$  and  $M$ . A boundary point  $A$  of  $D$  will be called accessible angularly if there exists a circular sector in  $D$  with vertex in  $A$ . If  $A$  is the end point of a rectilinear segment  $AB$  which lies, except for  $A$ , in  $D$ ,  $A$  is called accessible by segments. The author states that the set of points of  $\Gamma$  not accessible angularly is carried in a conformal map on a circle



into a set of measure 0. Furthermore, he asserts the existence of a region  $D$  bounded by a closed Jordan curve  $\Gamma$  and of a set  $E$  on  $\Gamma$  of 0 linear measure which is mapped into a set of positive measure. There also exists a region  $D$  bounded by a closed Jordan curve  $\Gamma$  the set of whose points accessible by segments is carried into a set of 0 measure. Further theorems of this type are stated for regions with rectifiable boundaries. The author appears in this work to use a definition of the linear measure of a point set more closely related to the definitions of Peano-Jordan than those of Lebesgue-Carathéodory.

W. Seidel (Rochester, N.Y.).

**Lavrentieff, M.: Sur une classe de représentations continues.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1010—1012 (1935).

The author introduces in this paper the following definition of a complex almost analytic function  $w = f(z)$  of a complex variable  $z$  defined in a region  $D$  of the  $z$ -plane: (1) The function  $f(z)$  is single-valued and continuous in  $D$ . (2) With the possible exception of a denumerable and closed set of values of  $z_0$ , the function  $w = f(z)$  defines a homeomorphism between sufficiently small neighborhoods of the points  $z_0$  and  $w_0 = f(z_0)$ ; if a circle in such a neighborhood is described by  $z$  in the positive sense about  $z_0$  the point  $w = f(z)$  will describe a closed Jordan curve also in the positive sense. (3) There exist two real functions  $p(z) \geq 1$  and  $\theta(z)$  of the variable  $z$ , called the characteristic functions of  $f(z)$ , such that  $p(z)$  is continuous in  $D$ ,  $\theta(z)$  is continuous in every point  $z$  of  $D$  for which  $p(z) > 1$ . Furthermore, if an ellipse  $E$  is constructed in the  $z$ -plane with center at  $z_0$  whose major axis forms an angle  $\theta(z_0)$  with the real axis and whose major and minor axes,  $a$  and  $b$ , respectively, satisfy the condition

$$1 < \frac{a}{b} = p(z_0), \text{ then } \lim_{a \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{f(z_2) - f(z_0)} \right| = 1$$

where  $z_1$  and  $z_2$  are any two points of  $E$  for which  $|f(z) - f(z_0)|$  attains its maximum and minimum, respectively. The author states: For any pair of functions  $p(z)$  [ $p(z) \geq 1$ ] and  $\theta(z)$  in  $|z| \leq 1$ , where  $p(z)$  is continuous in  $|z| \leq 1$  and  $\theta(z)$  is continuous in all points of  $z$  where  $p(z) > 1$ , one may construct an almost analytic function  $w = f(z)$  in  $|z| \leq 1$  with  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , which defines a homeomorphism between the circles  $|z| < 1$ ,  $|w| < 1$  and which possesses  $p(z)$  and  $\theta(z)$  as its characteristic functions. If the above conditions on  $p(z)$  and  $\theta(z)$  hold for all  $|z| \leq 1$  except  $z = 0$ , then the

same conclusion is true provided (\*)  $\int_0^r \frac{1}{q(r)} dr$  diverges, where  $q(r) = \max_{|z|=r} p(z)$ . The

author proceeds to show the close analogy between the class of almost analytic functions and analytic functions. Thus, the following analogue of Picard's theorem holds: If  $f(z)$  is almost analytic in  $|z| < 1$ ,  $z \neq 0$ ; if for  $z \rightarrow 0$   $f(z)$  tends to no definite limit, finite or infinite, and if (\*) holds, then  $f(z) = a$  is satisfied in infinitely many points  $z$  converging to  $z = 0$  for all values of  $a$  except perhaps one. Analogues of Fatou's theorem and of the uniqueness theorem are also stated as well as some geometric applications. No proofs are given.

W. Seidel (Rochester, N.Y.).

**Stollow, Simon: Remarques sur la définition des fonctions presque analytiques de M. Lavrentieff.** C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1520—1521 (1935).

L'A. montre que deux des conditions servant à définir les fonctions presque analytiques de M. Lavrentieff [C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1010 (1935); voir ce réf. préc.], reviennent à la définition des transformations intérieures, dont l'étude approfondie a été faite par l'A.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Takenaka, Satoru: On a class of quasi analytic functions and the closure of  $\{t^n\}$  on  $(-\infty, \infty)$ .** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 219—223 (1935).

En partant du fait que si les conditions (1)  $\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)} > \delta > 0$ , (2)  $\int_{t^2}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt$  diverge (conditions de M. de la Vallée Poussin) ont lieu,  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt} dt$  appartient à une

klasse quasi-analytische, l'auteur démontre que (1), (2) et les conditions  $|f(t)| < Ae^{-\psi(t)}$  ( $-\infty < t < \infty$ ),  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^n dt = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) impliquent que  $f(t)$  est indéniablement nulle. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

Dingle, Herbert: The meaning of probability. *Nature* 136, 423—426 (1935).

Mihoc, G.: Über allgemeine Eigenschaften von unabhängigen statistischen Variablen. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* 37, 37—39 (1935) [Rumänisch].

Bavli, G. M.: Eine Verallgemeinerung des Poissonschen Grenzwertsatzes. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 508—510 u. dtsh. Zusammenfassung 511 (1935) [Russisch].

Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unabhängige zufällige Größen, wobei  $x_k$  mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha_k$  gleich Null bleibt. Wir bezeichnen mit  $H_k(x)$  die bedingte Verteilungsfunktion von  $x_k$  im Falle von  $x_k \neq 0$ . Es sei weiter vorausgesetzt, daß bei  $n \rightarrow \infty$

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \rightarrow 0 \quad (1) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \rightarrow a \quad (2) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k H_k(x) \rightarrow a H(x) \quad (3)$$

[dabei variieren mit  $n$  alle Wahrscheinlichkeiten  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) und alle Verteilungsfunktionen  $H_k$ ]. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Verteilungsfunktion  $F_n(x)$  der Summe  $\sum_{k=1}^n x_k$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen  $G(x) = e^{-a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \Phi_i(x)$ , wobei

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \Phi_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{i-1}(x - \xi) dH(\xi) \quad \text{gesetzt ist.} \quad \text{Autoreferat.}$$

Pólya, G.: Zwei Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* 80, 123—130 (1935).

Die erste Aufgabe betrifft die Zurückwerfung des Lichts durch eine zufallsartig gewellte Fläche (bewegte Fläche eines Sees) und wird auf folgende zurückgeführt: Gegeben ist eine Ebene  $E$  und zwei auf der gleichen Seite von  $E$  gelegene Punkte  $A$  und  $B$ ; in einem variablen Punkt  $P$  von  $E$  wird ein Spiegel so angebracht, daß er einen von  $A$  ausgehenden Lichtstrahl nach  $B$  zurückwirft; gesucht werden Kurven, in deren Punkten  $P$  die Spiegel mit  $E$  gleich große Winkel bilden. Verf. findet, daß diese Kurven und damit unter den eingeführten vereinfachenden Annahmen auch die Kurven der Punkte, die gleiche Helligkeit ergeben, in der Umgebung des Punktes  $O$ , der in der Schnittlinie  $g$  von  $E$  mit der Normalebene durch  $AB$  zu  $E$  liegt und in dem der Spiegel mit  $E$  zusammenfällt, homothetische Ellipsen sind, deren große Achsen in  $g$  liegen. — Die zweite Aufgabe betrifft die Entfernungen zwischen zufallsartig verteilten Punkten, und zwar handelt es sich um folgende beiden Aufgaben: A. „Gegeben ist die Raumdichte  $\delta$  eines im  $q$ -dimensionalen Raum zufallsartig verteilten Punktschwarmes. Gesucht ist der mittlere Abstand  $A_n$  eines Punktes von seinem  $n$ -t-nächsten Nachbarpunkt.“ — B. „Auf der Kugelfläche sind  $N+1$  Punkte zufallsartig verteilt. Gesucht ist der mittlere Winkelabstand  $\theta_n$  eines Punktes von seinem  $n$ -t-nächsten Nachbarpunkt.“ — Verf. findet:

$$A_n = \frac{n}{2\delta} \quad \text{für} \quad q = 1;$$

$$A_n = \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \right) \quad \text{für} \quad q = 2;$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt[3]{\delta}} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-5)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots (3n-3)} \right) \quad \text{für} \quad q = 3;$$

$$\theta_n = \pi \frac{1 \cdot 3 \dots (2N-1)}{2 \cdot 4 \dots (2N)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2N}{2N-1} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)(2N)(2N-2) \dots (2N-2n+4)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2N-1)(2N-3) \dots (2N-2n+3)} \right).$$

Kamke (Tübingen).



**Kelley, Truman L.:** An unbiased correlation ratio measure. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **21**, 554—559 (1935).

Das Pearsonsche Korrelationsverhältnis (correlation ratio)  $\eta^2$  besitzt die unangenehme Eigenschaft, daß die mathematische Erwartung seiner empirischen Annäherung (die aus den Daten der Stichprobe errechnet wird) nicht mit dem „apriorischen Werte“ desselben (für die gesamte „Population“) zusammenfällt. In der Terminologie der angelsächsischen statistischen Schule ausgedrückt ist also die erstere bloß ein „biased estimate“ des letzteren. Verf. schlägt nun eine andere Maßzahl  $\varepsilon^2$  vor, deren mathematische Erwartung, unter gewissen simplifizierenden Annahmen, den fraglichen apriorischen Wert ergibt:

$$\varepsilon^2 = [(N - 1) \eta^2 + 1 - k] / (N - k),$$

wobei  $N$  den Umfang der Stichprobe,  $\eta$  das Korrelationsverhältnis für die Stichprobe (nach der üblichen Formel berechnet) und  $k$  die Anzahl der Zeilen in der Korrelationstabelle bedeuten. Zum Schlusse wird auch die erste Annäherung an die Streuung der Maßzahl  $\varepsilon^2$  auf dem für die Pearsonsche Schule gewohnten Wege berechnet.

O. Anderson (Sofia).

**Fisher, R. A.:** The mathematical distributions used in the common tests of significance. *Econometrica* **3**, 353—365 (1935).

Verf. stellt in gedrängter Form die algebraischen Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen jener drei Verteilungsgesetze dar, die für die sog. „tests of significance“ maßgebend sind: der Helmer-Pearsonschen  $\chi^2$ -Verteilung, der „Student“-schen  $t$ -Verteilung und der R. A. Fisherschen  $z$ -Verteilung. Ausgangsannahme bleibt bei allen dreien eine Reihe von gegenseitig unabhängigen Werten, die eine „normal verteilte“, d. h. dem Gaußschen Verteilungsgesetze folgende Variable angenommen hat. Im Gegensatz zu seinen früheren Veröffentlichungen, auch zu seinem Vortrage „On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics“ (Proceedings of the Internat. Mathem. Congress, Toronto 1924), gibt jedoch Verf. einen Weg an, auf dem seine Formeln aus den Eulerschen Integralen allein mit Hilfe mathematischer Induktion, ohne den üblichen Übergang zum Euklidischen  $n$ -dimensionalen Raum, abgeleitet werden können.

O. Anderson (Sofia).

**Hendricks, Walter A.:** Analysis of variance considered as an application of simple error theory. *Ann. math. Statist.* **6**, 117—126 (1935).

● **Deuren, Pierre van:** Les applications des probabilités. (Leçons sur le calcul des probabilités. Tome 2.) Paris: Gauthier-Villars & Cie. et Namur: Ad. Wesmael-Charlier 1935. XVI, 556 pag.

Auf den ersten, der Theorie der Wahrscheinlichkeit gewidmeten Band (Buch I—VI; vgl. dies. Zbl. **12**, 26) folgt nun der zweite (Buch VII—XII). Dieser beschäftigt sich mit den Anwendungen auf die mannigfachsten Gebiete, welche fast alle mit einer bei der Mehrzahl der Lehrbücher ungewohnten Ausführlichkeit behandelt sind, und enthält verschiedene originelle und interessante Bemerkungen. Es sei beispielsweise hervorgehoben: im Buch VII (Theorie der Statistik) die Begründung des „Prinzips des Kardinals Newman“, welches ein bemerkenswertes Korollar des Theorems von Bayes bildet; im Buch VIII (Fehlertheorie) die Ableitung des Prinzips der kleinsten Quadrate aus dem allgemeinen Prinzip der „kleinsten Kovariante“; im Buch IX (aleatorische Operationen) die sehr allgemeine und interessante Auffassung, der sich die Behandlung der Lebensversicherung im Buch X in natürlicher Weise anschließt; im Buch XI (Ballistik) die in übersichtlicher Weise hergestellte Verbindung zwischen den theoretischen Prinzipien und den praktischen Regeln; im Buch XII (verschiedene Anwendungen), welches der Mitarbeit der Herren R. Hennet und R. Marchant entstammt, die Klarheit, mit der ein wenn auch notwendigerweise unvollständiger Umriß der arithmetischen Wahrscheinlichkeiten, der statistischen Mechanik und schließlich Anwendungen auf die Astronomie und den Betrieb von Telephonzentralen gegeben werden. Bruno de Finetti (Trieste).

**Huszar, Géza:** Sur les itérations élémentaires, concernant la formule d'Euler. *Aktuár. Vědy* **5**, 74—83 (1935).

On a modifié la méthode d'itération pour déterminer la valeur  $i$  de la formule d'Euler pour la valeur escomptée d'une rente normale par les approximations suc-

cessives et obtenu la correction  $[1/a_n] - 1/a_n(i_k): D$  de la valeur itérée  $i_k$ . Avec la valeur approximative du quotient différentiel  $D$  de la fonction  $1/a_n(i)$  dans un point moyen entre 0 et  $i$  on obtient des résultats suffisant pour la pratique par le deuxième ou troisième pas, c'est ce qu'on montre par les applications numériques. En utilisant les corrections tantôt pour  $D = 1$ , tantôt pour la valeur déduite par l'auteur on reçoit une itération convergente bilatérale.

Janko (Praha).

Hagstroem, K. G.: Alcune considerazioni sulle funzioni dell'assicurazione malattia. Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 256—265 (1935).

Für Untersuchungen über die Zusatzversicherung der Prämienbefreiung im Krankheitsfall bei den üblichen Lebensversicherungen ist eine Darstellung der nur während der Krankheitsdauer zahlbaren temporären Leibrente  $\bar{c}_{x:\overline{m}|}$  erforderlich. Verf. gibt eine solche allgemeine Darstellung, in welcher auch die Mindestdauer  $\varepsilon$  der Krankheit berücksichtigt wird, von welcher angefangen der Rentenbezug beginnt. Unter gewissen einschränkenden Annahmen (die Erkrankungswahrscheinlichkeit soll vom Eintritts- und Erkrankungsalter nicht abhängen; ebenso die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kranker mindestens  $u$  Jahre krank bleibt; die Sterbeintensität soll konstant sein) wird diese allgemeine Darstellung auf eine Form gebracht, die rechnerisch ausgewertet werden kann. Die auf Grund eines statistischen Materials mit Hilfe dieser Darstellung gefundenen Werte von  $\frac{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|} - \bar{c}_{x:\overline{m}|}}$ , wo  $\bar{a}_{x:\overline{m}|}$  die gewöhnliche kontinuierliche Leibrente bedeutet, werden für verschiedenen Zinsfuß und verschiedenes  $\varepsilon$  in einer Tabelle angegeben.

Birnbaum (Lwów).

Tauber, Alfred: Die Zufallsverträge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aktuar. Vědy 5, 1—29 u. 65—73 (1935).

Für einen sehr allgemeinen Typus eines Zufallsvertrages wird der Begriff „Überentgelt“ ( $S$ ) eingeführt sowie das durchschnittliche ( $R$ ) und das mittlere ( $T$ ) Risiko des einzelnen Vertrages ermittelt. Das kombinierte Risiko  $\bar{R}$  von  $k$  gleichartigen Verträgen ( $R$ ) weist einen sehr komplizierten Bau auf; es ist daher zweckmäßig, die Untersuchung auf einen ganz einfachen Sonderfall einzuschränken: zu leistender Einsatz  $\mathfrak{C}$ , im Falle des Eintreffens des Ereignisses wird der Betrag  $\mathfrak{A}$ , im Falle des Nichteintreffens der Betrag  $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$  ausbezahlt, Wahrscheinlichkeit des Eintreffens ist  $w$ . Es ergibt sich dann  $R = w(1-w)(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - wS$ ,  $T = \sqrt{S^2 - w(1-w)(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2}$ . Als charakteristische Größen des Vertrages werden eingeführt:  $\varepsilon = S/[w\mathfrak{A} + (1-w)\mathfrak{B}]$  (relatives Überentgelt),  $\vartheta = \frac{S}{R}$  (Sicherheitskoeffizient),  $\gamma = w\mathfrak{A}/[w\mathfrak{A} + (1-w)\mathfrak{B}]$  (Hoffnungswert im Eintreffensfall als Bruchteil des gesamten Hoffnungswertes). Daraus folgt  $\frac{R}{T} = \left[ \frac{w(1-w)}{1 + w(2\vartheta + \vartheta^2)} \right]^{1/2}$ ; da man aber  $T$  im Äquivalenzfall als Maß einer Verlusterwartung auffassen kann, so könnte man durch eine Verallgemeinerung bei Beachtung dreier naheliegender Bedingungen zu einer Definition eines mittleren Risikos  $\mathfrak{R} = T - \frac{S}{\sqrt{1-w}}$  gelangen, noch einfacher ist es aber, eine obere Grenze  $\mathfrak{R}^* = \left(1 - \frac{w\varepsilon}{\gamma - w}\right)T$  einzuführen. Für eine Gruppe von  $k$  Verträgen dieser einfachen Art findet man  $\frac{\bar{R}}{R} = \frac{(\sigma - 1)^{k-\mu}}{\sigma^{k-1}} \Psi_k(\varrho, \sigma)$ ,  $\varrho = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}$ ,  $\sigma = \frac{1}{1-w}$ ,  $\mu$  ganze Zahl, so daß  $\frac{k}{\varrho} = \mu - \delta$ ,  $0 \leq \delta < 1$ ;  $\Psi_k(\varrho, \sigma)$  Polynom. — Im Falle der Äquivalenz ( $S = 0$ ,  $\varrho = \sigma$ ) erhält man  $\Psi_k(\sigma, \sigma) = \mu \binom{k}{\mu}$  und folgert mit Benützung der Stirlingschen Formel für die Größenordnung  $\frac{\bar{R}}{R} \lesssim \sigma \sqrt{\frac{k\mu}{2\pi(k-\mu)}}$ ; ist aber  $S \neq 0$ , dann hat man eine obere Grenze für  $\Psi_k(\varrho, \sigma)$  anzugeben; die entsprechende Untersuchung wird im Anhang durchgeführt. Man erhält daher schließlich:  $\frac{\bar{R}}{R} \lesssim ck^{\alpha-1}\beta^k$ ,  $c = \frac{b\varrho\sigma}{\sqrt{2\pi(\varrho-1)}}$ ,  $\beta = \frac{\varrho}{\sigma} \left(\frac{\sigma-1}{\varrho-1}\right)^{1-\frac{1}{\varrho}}$ ; liegen



aber nicht so einfache Voraussetzungen vor, so wird man versuchen, durch passend gewählte Ersatzverträge der obigen Art Näherungen zu gewinnen: man kann verlangen, daß Hoffnungswert,  $S$  und  $T$  übereinstimmen, oder daß nicht für beide Verträge  $T$ , sondern  $R$  gleich sei, oder daß in beiden Fällen dieselben Größen  $R, S, T, \gamma$  resultieren. Vollständig wird die Rechnung für Verträge durchgeführt, deren Fälligkeiten von zwei verschiedenen Ereignissen abhängen. Ist das kombinierte Risiko verschiedenartiger Zufallsverträge zu ermitteln, so wird man versuchen, durch geeignet gewählte Durchschnittsrechnungen zu einfacheren Typen überzugehen, zwei hierher gehörende Gedankengänge werden rechnerisch verfolgt. Genauer wird die Hauptkonstante für  $k$  einfachste Verträge, die mit  $k'$  anderen, gleichfalls einfachsten Verträgen kombiniert sind, berechnet. F. Knoll (Wien).

**Diwan, G. S., and V. V. Narlikar:** A practical financial transaction. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 182—184 (1935).

Im Bd. 64, S. 71 des J. Inst. Actuar. hatte D. P. Misra gezeigt, daß für gewisse Finanzoperationen mehrere Zinsfüße möglich sind. Die Verf. zeigen hier nun in einfacher Weise, daß für alle praktisch vorkommenden Finanzoperationen immer nur ein Zinsfuß möglich ist, indem sie zunächst eine vernünftige Definition einer Finanzoperation geben. Sie definieren: Eine praktische Finanzoperation liegt dann vor, wenn der ursprüngliche Gläubiger immer Gläubiger und der ursprüngliche Schuldner immer Schuldner bleibt. Die von Misra angeführten Beispiele genügen dieser Bedingung nicht. Löer (Göttingen).

## Geometrie.

**Thébault, V.:** Contribution à la géométrie du triangle et du quadrangle. Mathesis 48, Nr 9, Suppl., 1—36 (1934).

**Ocagne, d':** Remarques au sujet d'une note récente de M. Lowett. Bull. Sci. math., II. s. 59, 198—199 (1935).

Verf. betrachtet die Kurve  $M$ , welche erzeugt wird vom Scheitel eines rechten Winkels  $AMB$ , der sich derart bewegt, daß sein Schenkel  $MB$  stets die Kurve  $(B)$  berührt, indem ein auf dem anderen Schenkel fixierter Punkt  $A$  die Kurve  $(A)$  durchläuft. (Über diese Kurve handelt die Note von Lovett im Bull. Sci. math. 59, 7; dies. Zbl. 10, 369.) Er gibt eine Konstruktion des Krümmungszentrums  $\mu$  der Kurve im Punkte  $M$ , wenn die Krümmungszentra der Kurven  $(A)$  und  $(B)$  gegeben sind. Diese Konstruktion ist ein Beispiel für die Anwendung der fundamentalen Eigenschaft der Momentankreise. Der Momentankreis des Punktes  $M$  ist der Kreis mit Zentrum  $M$ , der durch das Momentanzentrum geht. [Vgl. die Mitteilung des Verf. in den C. R. Acad. Sci., Paris 198, 133 (1934); dies. Zbl. 8, 171.] G. Schaake (Groningen).

**Sawayama, Yûzaburô:** An extension of the definitions of perpendicular and power. Tôhoku Math. J. 41, 156—168 (1935).

Two lines are said to be pseudo-perpendicular if they are conjugate lines of a given conic  $K$ . A definition is given of the power of a point with respect to  $K$  or to a conic homothetic with  $K$  and also of inverse figures with respect to such conics. The circles in theorems on circles may then be replaced by homothetic conics. Proofs for such theorems can of course be given by means of an affine transformation, but if  $K$  is a hyperbola, imaginaries ought to be used. The author gives in particular proofs for the extension of Steiner's theorems on the circles circumscribed to the triangles formed by four lines, taken three by three. O. Bottema (Deventer).

**Dasgupta, P. N.:** On an octavic related to two co-planar tetrads of points. Bull. Calcutta Math. Soc. 26, 73—76 (1935).

In der Ebene seien zwei Punktquadrupel vorgegeben. Ein Punkt  $P$  projiziere sie bzw. unter den Doppelverhältnissen  $\varrho$  und  $\sigma$ . Untersucht wird der Ort für alle Punkte  $P$  derart, daß zwischen  $\varrho$  und  $\sigma$  eine vorgegebene quadratische Beziehung

besteht. Es findet sich eine Kurve 8. Ordnung, deren Doppelpunkte angegeben werden. Dualisierung. Verallgemeinerung. [Deutet man  $\varrho$  und  $\sigma$  als inhomogene Koordinaten in der Ebene, so wird die vorgegebene quadratische Beziehung die Gleichung eines Kegelschnittes, und man sieht unmittelbar, daß mit  $(\varrho, \sigma)$ ,  $(\varrho, \sigma')$ ,  $(\varrho', \sigma)$  nicht auch  $(\varrho', \sigma')$  ein Punkt des Kegelschnittes zu sein braucht. Daher sind die Sätze über gewisse der Kurve eingeschriebene Punktquadrupel falsch.] *E. A. Weiss* (Bonn).

**Nakasawa, Takeo:** Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit. I. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 235—255 (1935).

Formalisierung der Theorie der linearen Abhängigkeit von Punkten des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes. *R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Del Pezzo, Pasquale:** Geometria ad  $n$  dimensioni. Atti Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, II. s. 20, Nr 5, 1—20 (1935).

**Gourewitch, G.:** L'algèbre du trivecteur. Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 2/3, 51—113 (1935).

In dem ersten Paragraph macht Verf. einige Vorbereitungen. Er beweist u. a., daß der  $p$ -Vektor  $w_{i_1 \dots i_p}$  dann und nur dann einfach ist, wenn der Affinor  $w_{i_1 \dots [i_p} w_{h_1 \dots] \dots h_p}$ , wo über  $p+1$  oder  $p+2$  Indizes alterniert wird, verschwindet. Zu jedem Trivektor  $w_{j i h}$  gehört eine Zahl  $q$  derart, daß  $w_{j i h}$  als  $\frac{1}{2} u_{[i j} \frac{1}{2} p_h] + \dots + \frac{q}{2} u_{[i j} \frac{q}{2} p_h]$  geschrieben werden kann und nicht als eine derartige Summe mit weniger Summanden. Es ist Verf. nur für  $q=1$  gelungen, die n. u. h. Bedingungen, denen  $w_{j i h}$  genügen soll, anzugeben. Die von Schouten angegebenen n. u. h. Bedingungen dafür, daß der Rang eines Trivektors gleich  $r$  sei (R. K., S. 53), werden für  $r=5, 6$  und  $7$  etwas vereinfacht. Es gelingt dann für  $r=6$  die zwei (für reelle Trivektoren drei) verschiedenen Typen anzugeben, wie auch die n. u. h. Bedingungen dafür (vgl. für  $r=7$ : dies. Zbl. 10, 53 und für  $r=8$ : dies. Zbl. 12, 100). — Wenn für jeden Vektor  $v^h$  gilt, daß der Rang des Bivektors  $w_{i j h} v^h$  die Zahl  $2s$  nicht übertrifft, und gibt es einen Vektor  $u^h$  derart, daß  $w_{i j h} u^h$  den Rang  $2s$  hat, so ist  $s$  eine arithmetische Invariante. Hat man  $s$  schon bestimmt, so findet man den Rang  $r$  durch Anwendung des Theorems: Verschwindet der Ausdruck

$$w_{[i_1 m_1 n_1} w_{i_2 m_2 n_2] \dots w_{i_s m_s n_s} w_{h_1 i_1 j_1} \dots w_{h_q i_q j_q} \quad (1)$$

für  $q=t+1$  und nicht für  $q=t$ , so ist  $r=2s+t+1$ . Es wird noch eine andere arithmetische Invariante  $h$  benutzt. Sind  $w_{i j h} u^h$  und  $w_{i j h} v^h$  zwei Bivektoren vom Range  $2s$ , so schneiden sich die zugehörigen  $E_{2s}$  in einer  $E_m$ . Das Minimum von  $m$  wird mit  $2s-h-1$  bezeichnet (vgl. dies. Zbl. 10, 2). Es ist  $0 \leq h \leq s-1$ . Alterniert (oder mengt) man in (1) über die Indizes  $i_1 \dots i_q$ , so verschwindet dieser Ausdruck für  $q=h+1$  und nicht für  $q=h$ . Es werden noch einige Ungleichheiten, denen  $r$ ,  $s$  und  $h$  genügen, abgeleitet, wodurch man ohne  $s$  zu kennen eine n. u. h. Bedingung (eine Verschärfung der Schoutenschen Methode), damit der Rang gleich  $r$  sei, angeben kann.

*J. Haantjes* (Delft).

**Roussopoulos, A.:** Über die Beweglichkeit der Polyeder. Das statische Analogon. Prakt. Akad. Athénōn 10, 157—163 (1935).

Es wird der bekannte Zusammenhang zwischen infinitesimalen Bewegungen eines Polyeders und Selbstspannungen eines Fachwerks (ohne Zitate) hergeleitet. Aus der irrümlichen Behauptung, daß ein statisch bestimmtes Fachwerk keiner Selbstspannungen fähig sei, wird die Starrheit der konvexen geschlossenen Polyeder hergeleitet.

*Cohn-Vossen* (Moskau).

### Algebraische Geometrie:

**Burinton, Richard Stevens:** A classification of plane cubic curves under the affine group by means of arithmetic invariants. Tôhoku Math. J. 41, 188—202 (1935).

The author gives a series of arithmetical invariants which serve to classify plane cubics under the affine group. A preliminary subdivision into eight classes is made by considering the rank and signature of the Hessian matrix of the equation of the



cubic regarded as a function of the variables  $x, y$ . The more detailed classification is obtained by considering the relations of the curve to the conics which contain the middle points of chords parallel to the linear asymptotes. In all 110 species are obtained whose equations belong to 42 canonical forms. *J. A. Todd* (Manchester).

**Weiss, E. A.: Zur Theorie des syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung.** *J. reine angew. Math.* **173**, 222—232 (1935).

Der Verf. entwickelt eine Abbildung der ebenen Kurven dritter Ordnung, der Kurven dritter Klasse und der Kegelschnittsnetze auf Punkte eines  $R_{19}$ , und zwar gehen die Kurven eines syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung in die Punkte einer Geraden, die Kurven des mit dem syzygetischen Büschel invariant verbundenen Büschels von Kurven dritter Klasse in die Punkte einer anderen Geraden über. Das System der zum syzygetischen Büschel gehörigen Polarkegelschnittsnetze entspricht den Punkten einer rationalen kubischen Kurve, die in dem durch jene beiden Geraden bestimmten  $R_3$  liegt. Mit Hilfe dieser Abbildung wird eine neuartige Darstellung der Theorie des syzygetischen Büschels ermöglicht. In erster Linie lassen sich die Sätze von H. S. White [Conics and cubics connected with a plane cubic by certain covariant relations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **1**, 1—8 (1900)] durch Vollzug der Abbildung aufstellen.

*Haenzel* (Karlsruhe).

**Weiss, E. A.: Die Autopolokoniken der singulären Kurven 3. Ordnung.** *J. reine angew. Math.* **173**, 233—242 (1935).

Die Abhandlung setzt die vorstehend referierte Arbeit fort. Die Sätze von White über Polarkegelschnitte und Autopolokoniken des syzygetischen Büschels einer regulären Kurve dritter Ordnung wurden für singuläre Kurven von P. Gordan [Die Hessesche und die Cayleysche Kurve. *Trans. Amer. Math. Soc.* **1**, 402—413 (1900)] formelmäßig tabellarisch zusammengestellt. Nunmehr gibt der Verf. mit Hilfe seiner Abbildung eine Ableitung und Formulierung Whitescher Sätze auch für singuläre Kurven dritter Ordnung.

*Haenzel* (Karlsruhe).

**Kol, J. W. A. van: Richtigstellung einiger Anzahlen von biquadratischen Raumkurven erster Art.** *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **38**, 750—751 (1935).

Ergänzungen und Berichtigungen zu einer früheren Arbeit desselben Verf. [siehe *Akad. Wetensch. Amsterdam Proc.* **32**, 495 (1929)] über die Anzahlen der Raumkurven 4. Ordnung 1. Art, die durch 4 gegebene Punkte hindurchgehen und verschiedenen anderen Bedingungen unterworfen sind.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Krueger, Raymond Leslie: Plane quintic curves, a classification and projective construction.** *Tôhoku Math. J.* **41**, 27—51 (1935).

Die ebenen Kurven fünfter Ordnung werden nach den verschiedenen Anordnungen ihrer Singularitäten klassifiziert; hierbei werden nur „gewöhnliche“ Singularitäten betrachtet. Verf. findet für die maximale Anzahl der möglichen Typen die Zahl 1974, nämlich 1401 für die rationalen und 573 für die irrationalen Kurven. — Er betrachtet die Kurven fünfter Ordnung, die mittels der folgenden projektiven Konstruktion erzeugt werden können. Gegeben sind zwei Kegelschnitte  $k_1$  und  $k_2$ , ein Punkt  $A$  auf  $k_1$ , ein Punkt  $B$  auf der Geraden, die  $A$  mit einem Schnittpunkt von  $k_1$  und  $k_2$  verbindet, und ein Punkt  $C$ . Eine  $A$  enthaltende Gerade  $a$  begegne einer durch  $C$  gehenden Geraden  $c$  auf  $k_1$ . Der Geraden  $a$  wird nun jede durch  $B$  gehende Gerade  $b$  zugeordnet, die  $c$  auf  $k_2$  trifft. Die Schnittpunkte einander zugeordneter Geraden  $a$  und  $b$  bilden eine Kurve achter Ordnung, die zusammengesetzt ist aus drei Geraden und einer Kurve fünfter Ordnung mit einem dreifachen Punkte in  $A$  und zwei Doppelpunkten in den Schnittpunkten von  $k_2$  mit  $BC$ . Bei verschiedener Wahl von  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $A$ ,  $B$  und  $C$  entstehen so 391 verschiedene Arten von Kurven fünfter Ordnung. Verf. beschreibt eine Maschine, mit deren Hilfe er Kurven aller genannten Arten gezeichnet hat. Schließlich gibt er eine genauere Betrachtung einiger merkwürdiger Spezialfälle.

*G. Schaake* (Groningen).

**Ramamurti, B.:** On the osculating spaces of a rational norm curve, which cut a linear complex in null-variant complexes. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 1, 179—181 (1935).

Im Raume  $S_n$  sind eine rationale normale  $C^n$  und ein linearer Strahlenkomplex  $\Gamma$  gegeben;  $\Gamma$  induziert auf  $C^n$  eine schiefssymmetrische doppeltbinäre Form (s. B. Ramamurti, dies. Zbl. 10, 412—413); und  $C^n$  enthält  $2k(n-k+1)$  Punkte  $P_i$  mit der Eigenschaft, daß die Geraden von  $\Gamma$ , die den betreffenden oskulierenden  $S_{2k-1}$  von  $C^n$  angehören, einen singulären Strahlenkomplex bilden. Es wird hier die Form ausgerechnet, die die Punkte  $P_i$  auf  $C^n$  darstellt. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Vaidyanathaswamy, R., and B. Ramamurti:** On the rational norm curve. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 1, 199—202 (1935).

Analytische formentheoretische Erläuterungen über eine bekannte Korrespondenz zwischen linearen Strahlenkomplexen eines Raumes  $S_{n+1}$  und Enveloppen 2. Klasse eines Raumes  $S_n$  (s. R. Vaidyanathaswamy, *J. London Math. Soc.* 1932, 52—57; dies. Zbl. 3, 362). *E. G. Togliatti* (Genova).

**Arvesen, Ole Peder:** Sur les contours apparents en projection des surfaces algébriques. *Norske Vid. Selsk., Skr. Nr 6*, 1—10 (1935).

Einer algebraischen Fläche  $F$  wird von einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt  $P$  aus ein Kegel umgeschrieben; die Tangentialgleichung der Schnittkurve des Kegels mit der  $xy$ -Ebene folgt unmittelbar aus den Tangentialgleichungen von  $F$  und  $P$ . Anwendungen auf die algebraischen Flächen, insbesondere der 2. und der 3. Klasse, die zwei gegebene Umriss in Doppelorthogonalprojektion besitzen. Beispiele. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Todd, J. A.:** On the topology of certain algebraic threefold loci. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 4, 175—184 (1935).

Für die folgenden dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten werden die Homologiezahlen und Homologiebasen bestimmt: 1. Rationale  $V_3$ , deren ebenen Schnitte die Flächen  $m$ -ter Ordnung durch eine irreduz. Kurve  $C^p$  vom Geschlechte  $p$  des gewöhnlichen Raumes entsprechen; 2. die allgemeine Hyperfläche 3. Grades des Raumes  $S_4$ . In beiden Fällen ergibt sich, daß  $R_1 = R_5 = 0$  ist, daß alle 2-Zykel und 4-Zykel algebraisch sind und daß eine Basis für die 3-Zykel gebildet wird von den 3-Zykeln auf einer festen Regelfläche, welche aus lauter Erzeugenden der Regelfläche bestehen. Im 1. Fall findet man  $R_2 = R_4 = 2$ ,  $R_3 = 2p$ ; im 2. Fall  $R_2 = R_4 = 1$ ,  $R_3 = 10$ . *van der Waerden* (Leipzig).

**Cherubino, Salvatore:** Sul concetto di parità nella teoria delle varietà abeliane reali e su alcune sue applicazioni. *Atti Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli*, II. s. 20, Nr 2, 1 bis 80 (1935).

The first part of this paper consists of a systematic exposition of the theory of real Abelian varieties, based on some ideas introduced by the author. Consider an Abelian variety  $V_p$  possessing an involutory antibrational transformation  $S$  into itself. By suitable choice of the parameters  $(v_1, \dots, v_p)$  of  $V_p$ ,  $S$  can be expressed in the form  $v'_i \equiv \bar{v}_i + c_i \pmod{\omega}$ , where  $c_i$  are constants,  $\omega$  is the Riemann matrix associated with  $V_p$ , and  $c_i + \bar{c}_i \equiv 0 \pmod{\omega}$ . This involves the existence of a  $2p$ -rowed integer square matrix  $S$  of determinant  $(-1)^p$  such that  $\omega S_{-1} = \bar{\omega}$ , where  $S_{-1}$  is the transpose of  $S$ . The symmetry  $S$  defines a series (schiera) of such symmetries, corresponding to different values of  $c_i$ , and an associated series given by  $v'_i \equiv -\bar{v}_i + d_i$ ,  $d_i - \bar{d}_i \equiv 0 \pmod{\omega}$ . The rank  $\lambda$  of the matrix  $S + I$ , when the elements are taken mod 2, is an important invariant called the real character of  $S$ . The author introduces the idea of a minimum characteristic matrix. This matrix is of the form  $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$  where  $m$  and  $n$  are two integer matrices of  $p$  rows and  $2p$  columns, such that if  $\omega h$  denotes any simultaneous set of periods of  $v_1, \dots, v_p$  which are all real, then  $h_{-1} = xm$ , and that if  $\omega k$  denotes any set of periods which are pure imaginary then  $k_{-1} = yn$ ,  $x$  and  $y$  being rows of  $p$  integers. The matrix  $\omega^* = \omega \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}_{-1}$  then has the form  $(\alpha, \beta)$  where  $\alpha, \beta$  are real. The rank of any characteristic matrix is  $2p - \lambda$ . The rows of the matrices  $m, n$ , form bases for two systems of parity which are merely the coefficients, mod 2, in the expressions for the real and pure imaginary periods of  $v$  in terms of  $\omega$ . The author applies these concepts to prove the known theorem that there are essentially  $2^{p-\lambda+1}$  classes of real  $V_p$  belonging



to a non-singular  $\omega$ . Only two of these classes include varieties with real points, and such varieties possess  $\infty^p$  real points lying on  $2^{p-1}$  distinct sheets. The totality of points of  $V_p$  invariant under  $S$  is to be regarded as a variety covering each of these sheets  $2^1$  times. — In the second part of the paper the author introduces a type of birational transformation which he calls pseudo-ordinary. A transformation  $T$  of this type is such that  $TST^{-1}$  is a symmetry of the same series as  $S$ , and such that a characteristic matrix of  $S$  is unaltered by  $T$ . If this is true of one such matrix it is true of them all. The author considers the effect of these transformations on the real sheets of  $V_p$ . He also determines the intermediary functions associated with  $\omega$  which are transformed by  $S$  into themselves, and hence finds that the base number for real  $V_{p-1}$  of  $V_p$  is the number of distinct principal matrices  $A$  of  $\omega$  such that  $S_{-1}AS = -A$ . If  $\lambda > 0$  it is shown that  $V_p$  is birationally equivalent to an involution of order  $2^1$  on an abelian variety  $V_p^{(0)}$  of real type and having real character zero, and properties of this correspondence are obtained. The pseudo-ordinary transformations of  $V_p$  associated with  $S$  induce similar transformations on  $V_p^{(0)}$ , and vice versa. The number of intermediate varieties of  $V_p$ , real with respect to  $S$ , which are distinct with respect to pseudo-ordinary transformations is the same as the corresponding number for  $V_p^{(0)}$ . The paper contains many other results of interest, which for reasons of space cannot be mentioned here. *Todd.*

**Cherubino, Salvatore:** La base reale minima sulle varietà abeliane reali. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **94**, 563—577 (1935).

In a previous paper the author has shewn that an abelian variety  $V_p$  of real type possesses a real base, i.e. a set of  $\bar{q}$  continuous algebraic systems  $|\Phi_j|$  ( $j = 1, \dots, \bar{q}$ ) of algebraic  $V_{p-1}$ , each invariant under the symmetry  $S$  associated with  $V_p$ , and such that every other algebraic system of  $V_{p-1}$  invariant under  $S$  is equivalent to a linear combination of  $|\Phi_j|$  with integer coefficients [see Atti Accad. Sci. Napoli **20** (1935); see the prec. review]. In the present paper the author determines conditions under which the systems  $|\Phi_j|$  contain individual varieties which are invariant under  $S$ , and proves that these always exist provided that  $S$  leaves invariant the point  $u \equiv 0$ , where  $u = (u_1, \dots, u_p)$  is a set of parameters of  $V_p$  which are real with respect to  $S$ . In such a case the dimension of the system formed by these invariant varieties is not less than  $p$ . The case  $p = 2$  is considered by way of example.

*J. A. Todd* (Manchester).

### Differentialgeometrie:

**Golab, St.:** Sur la rectifiabilité des courbes dans la géométrie centro-affine plane. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 699—702 (1935).

Ist  $x(t)$ ,  $y(t)$  eine ebene Kurve- $C$ , so nennt man

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left| \frac{x'y'' - y'x''}{xy' - yx'} \right|} dt; \quad x' = \frac{dx}{dt}, \dots \quad (1)$$

ihre zentroaffine Bogenlänge; dabei ist der Koordinatenanfangspunkt  $O$  der Fixpunkt der zentroaffinen Transformationen. Die Geraden, die nicht durch  $O$  gehen, übernehmen in der zentroaffinen Geometrie die Rolle der isotropen Kurven. Ist  $S$  der einzige Punkt der Kurve  $C$ , für den der Integrand singularär ist, und besitzen  $y$ ,  $x$  stetige zweite Ableitungen, so gilt der Satz: Besitzt  $C$  in  $S$  eine von Null verschiedene euklidische Krümmung und ist  $S$  verschieden von  $O$ , dann hat (1) einen endlichen Wert; liegt dagegen  $S$  in  $O$ , dann ist (1) nicht endlich. *W. Haack* (Berlin).

**Lane, Ernest P.:** The neighborhood of a sextactic point on a plane curve. Duke math. J. **1**, 287—292 (1935).

Étude — au point de vue projectif — du voisinage d'un point  $O$  sextatique générique d'une courbe plane  $C$ . En introduisant des coordonnées  $(x, y)$  projectives non homogènes convenables, intrinsèquement liées à  $C$  et déterminées en faisant intervenir la conique et le faisceau des cubiques d'Halphen osculatrices à  $C$  en  $O$ , on obtient pour le voisinage de  $O$  sur  $C$  un développement de la forme:

$$y = x^2 + a(x^6 + x^8) + bx^9 + \dots;$$

d'ici s'ensuivent quelques conséquences pour les quartiques planes ayant en  $O$  un certain comportement avec  $C$ .

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Rembs, Eduard:** Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel. J. reine angew. Math. **173**, 160—163 (1935).

Bekanntlich stehen die Minimalflächen in Beziehung zur Infinitesimalverbiegung der Kugel. Da die Minimalflächen durch eine analytische Funktion nach Weierstraß darstellbar sind, muß auch jede Infinitesimalverbiegung der Kugel mit einer analytischen Funktion zusammenhängen. Dieser Zusammenhang wird in der vorliegenden Arbeit durch sehr einfache Formeln aufgeklärt. Beiläufig wird gezeigt, daß das Liebmannsche Problem der Gleitverbiegung einer Kugelkalotte auf einen einfachen Fall der dritten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für einen kreisförmigen Bereich herauskommt.

Cohn-Vossen (Moskau).

**Rembs, Eduard:** Über Gleitverbiegungen. Math. Ann. **111**, 587—595 (1935).

Es wird gezeigt: Auf einer konvexen Rotationsfläche gibt es stets abzählbar unendlich viele Breitenkreise, so daß eine der beiden Kalotten, in die die Fläche durch den Kreis zerlegt wird (nämlich diejenige mit der größeren Totalkrümmung) infinitesimale Gleitverbiegungen zuläßt. Die Kreise häufen sich gegen den größten Breitenkreis der Fläche, der aber nicht zu ihnen zählt. Die erwähnten Kalotten lassen stets auch „infinitesimale Gleitverbiegungen 2. Ordnung“ zu. — Bei der Kugel war der Teil des Satzes, der sich nur auf die infinitesimalen Gleitverbiegungen 1. Ordnung bezieht, durch Liebmann bewiesen worden. Im Fall der Kugel zeigt nun Verf. weiter: Keine der fraglichen Kalotten gestattet eine infinitesimale Gleitverbiegung 3. Ordnung. Damit ist zum erstenmal bewiesen, daß es keine Kugelkalotte gibt, die eine endliche stetige Gleitverbiegung zuläßt.

Cohn-Vossen (Moskau).

**Su, Buchin:** On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes.

III. Tôhoku Math. J. **41**, 1—19 (1935).

En poursuivant l'étude des surfaces  $S$  dont l'enveloppe des quadriques de Lie est une quadrique fixe  $Q$  (ce Zbl. **11**, 324) l'auteur examine l'ensemble des surfaces  $S$  dont le quadrilatère  $D$  de Demoulin engendre une famille  $F$  donnée de  $\infty^2$  quadrilatères de  $Q$ . Quelle que soit  $F$ , il existe deux familles  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  de surfaces  $S$  désignées au titre dont les asymptotiques correspondent et les points homologues sont situés sur les diagonales  $d$  de  $D$ . Les droites  $d$  engendrent un couple de congruences qui est stratifié par les surfaces  $S$  des deux familles  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ .

S. Finikoff (Moscou).

**Su, Buchin:** On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes.

IV. Tôhoku Math. J. **41**, 203—215 (1935).

L'auteur complète sa Note récente (voir le référent précédent) en démontrant que deux surfaces dont les asymptotiques correspondent et les quadrilatères de Demoulin aux points homologues coïncident, possèdent la propriété citée au titre et appartiennent aux familles  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  de la Note citée.

S. Finikoff (Moscou).

**Rachevsky, P.:** Congruence rectiligne dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 2/3, 212—226 (1935).

L'auteur appelle une congruence l'ensemble de  $\infty^{n-1}$  droites dans  $E_n$ . Si  $\bar{a}$  est le vecteur unitaire du rayon  $L$  et  $\bar{p}$  — le perpendiculaire sur  $L$  de l'origine, la congruence est déterminée par le tenseur métrique  $a_{ij} = \bar{a}_i \bar{a}_j$  de la sphère  $\bar{a}$  et par les tenseurs  $B_i = \beta_i + b_i$ ,  $b_{ij} = b_{ij} + ba_{ij}$  où  $\beta_i = \bar{p} \bar{a}_i$  et  $b = \frac{1}{n-1} \beta_{\alpha/\mu} a^{\alpha\mu}$ . Les tenseurs  $b_{ij}$ ,  $a_{ij}$  sont les coefficients de la seconde et de la troisième formes quadratiques de l'hypersurface — l'enveloppée moyenne de la congruence. Pour terminer il définit  $n-1$  foyers de  $L$ .

S. Finikoff (Moscou).

**Buzano, Piero:** Sistemi di due equazioni di Laplace per una funzione di tre variabili e loro varietà rappresentative. Mem. Ist. Lombardo Sci. **23**, 1—33 (1935).

Dans ce travail [déjà résumé dans Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 6 (1935); ce Zbl. **11**, 113] l'a. considère les  $V_3$  d'un  $S_n$  projectif:

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$



qui satisfont à un système  $\Sigma$  de deux équations de Laplace, à savoir pour lesquelles les  $x_i$  vérifient deux équations à dérivées partielles linéaires homogènes du deuxième ordre. Il fait en outre l'hypothèse essentielle que les seules équations du deuxième ou du troisième ordre auxquelles les  $V_3$  intégrales de  $\Sigma$  doivent satisfaire, soient respectivement les conséquences algébriques de  $\Sigma$  et les conséquences algébriques des équations tirées de  $\Sigma$  avec une seule dérivation, ce qui implique certaines conditions d'intégrabilité pour  $\Sigma$ . — La première des deux parties dont se compose le mémoire classifie les systèmes  $\Sigma$  en 8 types, suivant l'espèce du faisceau de coniques associé au système [pour cette importante notion cfr. A. Terracini, Atti Accad. Sci. Torino **49** (1913/14)]; en tenant compte des conditions d'intégrabilité et en effectuant une transformation convenable sur les variables  $u_1, u_2, u_3$ , l'a. parvient à des formes canoniques simples pour les 8 types de systèmes  $\Sigma$  susdits [deux de ceux-ci avaient déjà été rencontrés par E. Bompiani, Atti Accad. Sci. Torino **49** (1913/14) et par A. Terracini, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., s. V. **29** (1920)]. La deuxième partie du mémoire est dédiée à l'étude détaillée des systèmes  $\Sigma$  qui admettent un faisceau de coniques associé générique (c'est-à-dire: ayant 4 points-base distincts); les conditions d'intégrabilité de ces systèmes sont équivalentes à certaines propriétés géométriques, remarquables et relativement simples, dont jouissent leurs  $V_3$  intégrales. *Beniamino Segre* (Bologna).

**Norden, A.: Die relative Geometrie der Flächen im projektiven Raume.** Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg **2/3**, 229—265 (1935).

Soit  $s$  une surface donnée; l'auteur considère deux congruences ( $d_i$ ) conjuguée et harmonique à  $s$  et deux surfaces  $S$  et  $\Sigma$ :  $d_1$  joint les points homologues de  $s, S$ ;  $d_2$  est situé dans les plans tangents homologues de  $s, \Sigma$ . Si  $\xi$  et  $\Xi$  sont les coordonnées tangentielles de  $s$  et  $\Sigma$ ,  $x$  et  $X$  — celles des points de  $s, S$ , on a  $x_{ij} = G_{ij}^k x_k + p_{ij} x + b_{ij} X$ ,  $\xi_{ij} = \Gamma_{ij}^k \xi_k + \pi_{ij} \xi + b_{ij} \Xi$  où  $x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$  etc. Les quantités  $G_{ij}^k, p_{ij}, b_{ij}$  et  $\Omega = X\Xi$  assujetties à satisfaire certaine condition d'intégrabilité, déterminent  $s$  à une transformation projective près;  $G_{ij}^k$  et  $\Gamma_{ij}^k$  définissent sur  $s$  deux géométries intrinsèques: des géodésiques, des transports parallèles etc. On examine des cas particuliers: la configuration  $F$  dont les asymptotiques de  $s$  forment un réseau de Tchebycheff (= les tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille prises le long d'une ligne de la seconde sont parallèles dans la géométrie de  $G_{ij}^k$  ou  $\Gamma_{ij}^k$ ), les couples des surfaces  $s, S$  dont  $S$  est conjuguée à ( $d_1$ ) et les couples corrélatifs, les couples „métriques“ dont la géométrie  $G_{ij}^k$  est riemannienne, les couples „affines“ dont  $d_2$  sont situés dans un plan fixe etc. La théorie des surfaces de Fubini, celle de Blaschke et de Gauß sont contenues comme cas particuliers dans le schéma général du Mémoire. *S. Finikoff*.

**Pears, L. R.: Bertrand curves in Riemannian space.** J. London Math. Soc. **10**, 180—183 (1935).

Vgl. H. A. Hayden, dies. Zbl. **2**, 155.  $K$  sei eine Kurve des Riemannschen  $R_n$ . Verf. betrachtet die Möglichkeit, daß es eine infinitesimal benachbarte Kurve  $K + dK$  derart gibt, daß der Transport der Punkte von  $K$  längs der ersten Normalen  $x$  von  $K$  erfolgt, und daß durch Parallelverschiebung von  $x$  zum entsprechenden Punkt von  $K + dK$  die erste Normale von  $K + dK$  entsteht. Man ist also berechtigt,  $K$  und  $K + dK$  als infinitesimal benachbarte Bertrandkurven des  $R_n$  zu bezeichnen. Es zeigt sich, daß folgende Eigenschaften der gewöhnlichen Bertrandpaare erhalten bleiben: 1. Der infinitesimale Abstand entsprechender Punktpaare ist konstant. 2.  $K$  kann nicht beliebig gewählt werden, sondern zwischen den Krümmungen von  $K$  müssen Relationen bestehen. 3. Ist die zweite Krümmung von  $K$  konstant, so bildet die Tangente von  $K + dK$  einen konstanten Winkel mit der Richtung, die aus der entsprechenden Tangente von  $K$  durch Paralleltransport zum zugehörigen Punkt von  $K + dK$  entsteht. — Ist  $R_n$  insbesondere euklidisch, und  $n \geq 4$ , so findet man, daß die zweite oder die dritte Krümmung von  $K$  verschwinden muß. *Cohn-Vossen* (Moskau).

**Lopschitz, A.:** *Integrazione tensoriale in una varietà Riemanniana a due dimensioni.* Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis usw., Moskau Liefg 2/3, 200—209 (1935).

Die ersten Integrabilitätsbedingungen von (1)  $V_\mu v^\nu = w_\mu^\nu$  werden bekanntlich aus der Padova-Bianchischen Identität abgeleitet: (2)  $2V_{[\omega} w_{\mu]}^\nu = -R_{\omega\mu\lambda}^\nu v^\lambda$ . Falls  $n = 2$  und die Konnexion eine metrische Riemannsche ist, so ist auch  $R_{\omega\mu\lambda}^\nu = K(g_{\omega\lambda}\delta_\mu^\nu - g_{\mu\lambda}\delta_\omega^\nu)$ . In diesem Falle läßt sich also (für  $K \neq 0$ ) aus (2) die Lösung  $v^\nu$  von (1) sofort berechnen, und zwar ohne Quadraturen. Der Verf. untersucht etwas allgemeiner (und in einer direkten Symbolik) die Gleichung  $V_\mu v^{\nu_1 \dots \nu_p} = w_\mu^{\nu_1 \dots \nu_p}$  für  $n = 2$  und findet dabei, daß für  $p$  ungerade die Lösung ohne Quadraturen ausfindig gemacht werden kann, während der Fall eines geraden  $p$  noch Quadraturen verlangt. (Der Ref. hat sich hier der Kürze halber einer anderen Darstellungsmethode bedient als der Verf. selbst.)

HLAVATÝ (Praha).

**Fabricius-Bjerre, Fr.:** *Sur les variétés à torsion nulle.* Acta math. 66, 49—77 (1935).

Der von Weyl (Math. Z. 12, 154—159) eingeführte Begriff der Torsion, der von anderen Autoren (Cartan, Schouten, Bortolotti, Hlavatý, Perepelkine, Wundheiler usw.) unter verschiedenen Namen untersucht wurde, findet auch hier seine Anwendung. Der Verf. untersucht solche  $V_m$  in  $R_n$ , für welche die Übertragung in der zu  $V_m$  komplementären orthogonalen  $V_{n-m}^{n-m}$  integrel ist. Dazu ist das Verschwinden der dazugehörigen Krümmung die notwendige und hinreichende Bedingung. (Verf. nennt solch eine  $V_m$  „à torsion nulle“. Der Name Torsion ist hier also in anderem Sinne gemeint, als es in letzter Zeit üblich ist, und hat mit einer eventuellen Unsymmetrie der Übertragung nichts zu tun.) Aus der obengenannten n. u. h. Bedingung läßt sich sofort ablesen, daß alle zweiten Fundamentaltensoren  $h_{\lambda\mu}^e$  ( $e = m + 1, \dots, n$ ) dieselben Hauptrichtungen haben. Diese stimmen mit denen überein, die Struik (Grundzüge der mehrd. Diff., S. 95. Berlin 1922) als Hauptrichtungen der  $V_m$  bezeichnet. Die zu solch einer  $V_m$  gehörige Krümmungsmannigfaltigkeit degeneriert in einer Hypertetraeder, und die zugehörige Kühnesche Krümmungsspur besteht aus  $m$  Hyperebenen. Die obenerwähnten Hauptrichtungen geben Anlaß zur Konstruktion der Krümmungslinien, welche hier dieselben kennzeichnenden Eigenschaften haben wie für allgemeine  $V_{n-1}$  in  $V_n$ . (Alle diese Eigenschaften lassen sich auch für diese speziellen  $V_m$  in  $V_n$  [und nicht nur in  $R_n$ ] beweisen. Ref.) In Anlehnung an eigene Arbeiten (dies. Zbl. 10, 37; 11, 323) untersucht der Verf. noch verschiedene Fragen, welche nur in  $R_n$  (oder  $S_n$ ) einen Sinn haben: Evoluten- und Evolventen- $V_m$ , parallele  $V_m$ , Inversion, sphärische Abbildung (dieser Begriff wurde von Schirokov auch für  $V_n$  verallgemeinert [Bull. Soc. phys.-math. Kazan 3, 94—96 (1928)]; Ref.) usw. Einige von diesen Resultaten sind mit denen von Perepelkine (dies. Zbl. 10, 131; 11, 175; 12, 87) verwandt, wurden aber mit anderen Methoden und selbständig abgeleitet.

HLAVATÝ (Praha).

**Schouten, J. A., und J. Haantjes:** *Über allgemeine konforme Geometrie in projektiver Behandlung.* Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 706—708 (1935).

In dieser vorläufigen Mitteilung werden folgende Behauptungen ohne Beweis angeführt: Zu einer  $X_n$  mit allgemeiner konformen Geometrie läßt sich für  $n (> 2)$  ungerade eine  $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $H_{n+1}(x)$  angeben, in welcher sich  $X_n$  eindeutig auf  $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$  abbildet. Dabei hat  $H_{n+1}$  eine spezielle nicht gekrümmte Konnexion mit kovariantem konstantem metrischem Projektor  $a_{\alpha\beta}$ . Die Nullrichtungen des Fundamentaltensors von  $X_n$  stimmen mit den asymptotischen Richtungen der  $X_n$  in  $H_{n+1}$  überein. In jeder auf diese Weise konstruierten  $H_{n+1}$  läßt sich ein Koordinatensystem einführen, in welchem alle Gebilde in jeder einzelnen  $H_{n+1}$  durch dieselben Gleichungen gegeben werden und alle Größen in jeder einzelnen  $H_{n+1}$  dieselben Bestimmungszahlen haben.

Bem. des Ref.: Die vom Ref. angegebene Methode zur Behandlung der konformen Geometrie (dies. Zbl. 11, 175 u. nachst. Referat) läßt sich für  $n = 2$  nur dann anwenden, wenn die Fläche eingebettet ist. Aus den Arbeiten von Calapso [Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906)], Ogura [Tôhoku Math. J. 9 (1916)] und Fubini [Rend. Circ. mat. Palermo 41 (1916)] ist zu ver-



muten, daß diese Einbettung für  $n = 2$  eine prinzipielle Rolle spielt. Die oben besprochene Arbeit schließt diesen Fall  $n = 2$  aus, und aus einer darin enthaltenen Bemerkung läßt sich entnehmen, daß in der Frage nach einer eventuellen Einbettung gerade der Fall  $n = 2$  eine Sonderstellung einnehmen wird.

Hlavatý (Praha).

**Hlavatý, V.: Zur Konformgeometrie. II. Anwendungen, insbesondere auf das Problem der Affinnormale.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 738—743 (1935).

In einer früheren Arbeit hat Verf. gezeigt, wie man in der konformen Geometrie eine Konnexion bekommen kann. Die vom Verf. eingeschlagene Methode stempelt die  $K_n$  zur  $W_n$  ( $X_n$  mit einer Weylschen Übertragung), also  $\bar{V}_\mu a_{\lambda n} = Q_\mu a_{\lambda n}$ .  $Q_\mu$  ist in diesem Falle Gradientvektor (vgl. dies. Zbl. 11, 175; in diesem Referat hat sich ein Fehler eingeschlichen; die Methode kann nämlich auch immer für  $n = 3$  angewandt werden). In vorliegender Arbeit wird das Problem der Affinnormale einer  $X_n^{n-1}$  in  $L_n$ , was durch den Begriff der Umeichung ( $t_\lambda = \sigma t_\lambda$ ;  $t_\lambda$  ist der Tangentialvektor) mit der Geometrie der  $K_n$  zusammenhängt, behandelt. In „Induzierte und eingeborene Konnexion“ (dies. Zbl. 8, 179) hat Verf. gezeigt, daß zu jeder Wahl von  $t_\lambda$  eine „eingeborene“ Konnexion  $\Gamma_{cb}^a$  gehört. Bei  $t_\lambda \rightarrow \sigma t_\lambda$ :  $\Gamma_{cb}^a \rightarrow \Gamma_{cb}^a - h_{cb} h^{ae} \partial_e \log \sigma$ , woraus hervorgeht, daß  $'\Gamma_{cb}^a = \Gamma_{cb}^a + (n+1)^{-1} h_{cb} h^{ae} \nabla_e \log h$ , [ $h = \text{Det}(h_{cb})$ ], eine eichinvariante Konnexion ist (im holonomen Falle von der Ordnung 3). Die zu dieser Konnexion gehörige eichinvariante Normalenrichtung, die diese Konnexion induziert, wird angegeben.

J. Haantjes (Delft).

### Topologie:

**Birkhoff, Garrett: Sur les espaces discrets.** C. R. Acad. Sci., Paris 201, 19—20 (1935).

Die Arbeit bezieht sich auf die unter demselben Titel erschienene Note des Ref. (vgl. dies. Zbl. 11, 326) und stellt Beziehungen zwischen dieser Note und den früheren Arbeiten des Verf. fest. Insbesondere erweisen sich die diskreten Räume mit dem multiplikativen Axiom als mit den lattices im Sinne von G. Birkhoff identisch. Ferner: Ein endlich-dimensionaler diskreter Raum erfüllt dann und nur dann das erste Basisaxiom und gewisse einfache Dimensionsaxiome, wenn er in einem gewissen Sinne ein homomorphes Bild (Verf. sagt „Projektion“) eines Systems von endlich-vielen projektiven Räumen und endlich-vielen isolierten Punkten ist. In Berichtigung einer falschen Behauptung des Ref. formuliert schließlich der Verf. den folgenden Satz: Ein „lattice“ ist dann und nur dann  $n$ -dimensional und zweifach distributiv, wenn es isomorph ist mit dem Ring der abgeschlossenen Punktmengen eines aus  $n$  Punkten bestehenden diskreten Raumes. Wenn außerdem das erste Basisaxiom erfüllt ist, so liegt eine Boolesche Algebra vor.

P. Alexandroff (Moskau).

**Mira Fernandes, Aureliano de: Entfernung und Umgebung.** An. Asoc. españ. Progr. Ci. 2, 5—20 (1935) [Portugiesisch].

Bericht über ältere Resultate (Fréchet, Hausdorff) aus der Theorie der Limesräume und metrischen Räume.

H. Busemann (Kopenhagen).

**Mazurkiewicz, Stefan: Über die stetigen Abbildungen der Strecke.** Fundam. Math. 25, 253—260 (1935).

Verf. beweist folgenden von Knaster vermuteten Satz: Es gibt in  $C^2$  eine Residualmenge, bestehend aus Kurven, die alle zur Sierpinski'schen Universalkurve homöomorph sind. Für die Definitionen vgl. Jarník, Mh. Math. Phys. 41, 408—423 (dies. Zbl. 10, 276). Die Beweismethode ist im wesentlichen dieselbe wie bei Jarník l. c. und liefert eine Verschärfung des Satzes I; 1 von Jarník l. c.

Nöbeling.

**Cairns, S. S.: Triangulation of the manifold of class one.** Bull. Amer. Math. Soc. 41, 549—552 (1935).

Verf. zeigt, daß die in seiner Arbeit „On the triangulation of regular loci“ [Ann. of Math. 35, 579—587 (1934); dies. Zbl. 12, 36] entwickelte Methode auch die Zerlegung einer  $r$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse 1 im Sinne von Veblen und Whitehead (The Foundations of Differential Geometry, Kap. 5, 1934) in die Zellen

eines Komplexes liefert, und zwar eines endlichen oder unendlichen Komplexes, je nachdem die Mannigfaltigkeit durch endlich viele Gebiete zugelassener Koordinatensysteme überdeckbar ist oder nicht. *Nöbeling* (Erlangen).

**Eilenberg, Samuel:** *Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère.* Fundam. Math. 25, 267—272 (1935).

Es wird eine Reihe von Sätzen über topologische Involutionen zuerst von beliebigen unikohärenten lokal-zusammenhängenden Kontinuen, dann speziell von der zweidimensionalen Sphäre bewiesen. Es werden insbesondere einige Schnitteigenschaften festgestellt, die sich mit Hilfe von Involutionen ausdrücken lassen. Die Beziehungen zu den Rotationen und der Antipodenabbildung werden in natürlicher Weise betont. Schließlich werden die topologischen Resultate des Verf. auf die Verallgemeinerung eines funktionentheoretischen Satzes von Bieberbach angewandt: Sei  $f(z)$  eine in  $|z| < 1$  holomorphe Funktion mit  $f(0) = 0$  und  $f(z')/f(z'') \neq 1$  für beliebige  $z', z'', |z'| < 1, |z''| < 1$ . Dann ist  $f'(0) \leq 1$  [Bieberbach hat diesen Satz unter der Voraussetzung der Schlichtheit von  $f$  in Math. Ann. 77, 153ff. (1916) bewiesen]. *P. Alexandroff* (Moskau).

**Steiger, Franz:** *Die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich.* Comment. math. helv. 8, 48—69 (1935).

Im Anschluß an Begriffsbildungen von Brouwer und v. Kerékjártó, deren Verwendung von W. Scherrer weiter ausgebaut worden ist, gibt der Verf. im 1. Abschnitt eine Zusammenstellung derjenigen Relationen, die für die Monodromiegruppe der einer periodischen Flächentransformation nach Brouwer entsprechenden regulären Riemannschen Fläche zu beachten sind. Die Ordnung einer periodischen indikatrixerhaltenden Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht  $p > 1$  hat nach Wiman den maximalen Wert  $4p + 2$ . Für diesen Satz, den Wiman im Anschluß an Arbeiten von Schwarz, Noether, Hurwitz u. a. für die eindeutigen Transformationen von algebraischen Kurven in sich aufstellte und unter Zuhilfenahme funktionentheoretischer Gedankengänge bewies, gibt der Verf. einen topologischen Beweis, der auf der Formel von Hurwitz und den obengenannten gruppentheoretischen Relationen fußt. Durch dieselbe Methode ergeben sich, ohne daß der Verf. alle Einzelheiten der Beweise durchführt, folgende maximalen Ordnungen periodischer Abbildungen in weiteren Fällen:  $2p$  für nichtorientierbare Flächen ungeraden Geschlechtes  $p > 2$ ,  $2p - 2$  für nichtorientierbare Flächen geraden Geschlechtes  $p > 2$ ,  $4p - 4$  für indikatrixumkehrende Abbildungen orientierbarer Flächen ungeraden Geschlechtes  $p > 1$ ,  $4p + 4$  für indikatrixumkehrende Abbildungen orientierbarer Flächen geraden Geschlechtes  $p > 1$ . Der topologische Typus der Abbildungen maximaler Ordnung ist dabei bis auf einen Ausnahmefall eindeutig bestimmt. *Jakob Nielsen* (Kopenhagen).

**Reidemeister, Kurt:** *Die Fundamentalgruppe von Komplexen.* Math. Z. 40, 406 bis 416 (1935).

Es wird der Begriff der Wegegruppe dadurch erweitert, daß Folgen von sukzessiv inzidenten Zellen beliebiger Dimension als Wege angesprochen werden. Es wird die Deformation solcher Wege erklärt und die verallgemeinerte Wegegruppe durch Erzeugende und definierende Relationen dargestellt sowie ihre Bedeutung für die Konstruktion von Überlagerungskomplexen untersucht. *H. Seifert* (Dresden).

**Viectoris, Leopold:** *Gruppen mehrdimensionaler Wege.* Anz. Akad. Wiss., Wien 1935, 143—145 (Nr 15).

Es werden (für Polyeder und auch für viel allgemeinere Raumtypen) Gruppen definiert, die als  $n$ -dimensionale Verallgemeinerungen der Poincaréschen Fundamentalgruppe aufgefaßt werden können (für  $n = 1$  liefert die Definition gerade die Poincarésche Gruppe). Diese Gruppen (die Gruppen  $n$ -dimensionaler Wege) sind im allgemeinen nicht kommutativ; jeder unverzweigte Überlagerungsraum des gegebenen Raumes  $R$  hat für  $n \geq 2$  (bis auf Isomorphie) dieselbe Gruppe  $n$ -dimensionaler Wege



wie  $M$ . Die Definition der Wegegruppen ist die folgende:  $E^n$  sei eine Vollkugel,  $S^{n-1}$  ihr Rand.  $S^{n-1}$  sei durch eine  $S^{n-2}$  in zwei Hälften geteilt usw. bis zu  $S^1$ . Die Halbkugeln seien jedesmal so orientiert, daß sie (auch algebraisch) denselben Rand haben (also inkohärent orientiert). Ein stetiges Abbild  $P^n$  von  $E^n$  heißt ein  $n$ -dimensionaler Weg von  $P^{n-1}$  nach  $Q^{n-1}$  (das sind die Bilder der ersten beiden Halbkugeln). Die Bilder der verschiedenen Halbkugeln heißen die Seiten des Weges. Sie sind selbst Wege. Ist  $Q^n$  ein Weg von  $Q^{n-1}$  nach  $P^{n-1}$ ,  $P^n$  der mit ihm punktweise übereinstimmende Weg von  $P^{n-1}$  nach  $Q^{n-1}$ , so schreibt man  $Q^n = -P^n$ . Es folgt eine Erklärung der Addition und der Homotopie von Wegen. Die Gruppe  $W^n$  der  $n$ -dimensionalen Wege ist die Gruppe der Substitutionen der  $n$ -dimensionalen Wege von einem festen  $A^{n-1}$  nach einem festen  $B^{n-1}$ , wobei die Substitution homotoper Wege durcheinander das neutrale Element der Gruppe ist. Die Gruppe ist von der speziellen Wahl von  $A^{n-1}$  und  $B^{n-1}$  bis auf Isomorphie unabhängig. *P. Alexandroff* (Moskau).

**Vietoris, L.: Stetige Abbildung und höherer Zusammenhang.** Fundam. Math. 25, 102—108 (1935).

Fortführung der bekannten früheren Untersuchungen des Verf. über denselben Gegenstand [Math. Ann. 97, 454—472 (1927)]. Es liege eine stetige Abbildung  $f$  des kompakten metrischen Raumes  $R$  auf den kompakten metrischen Raum  $R'$  vor.  $R$  zerfällt in die Urbilder der einzelnen Punkte von  $R'$  bei der Abbildung  $f$ . Von diesen Urbildern wird vorausgesetzt, daß sie alle mit der Ausnahme eines einzigen  $A$  in den Dimensionen  $0, \dots, n-1$  azyklisch sind, während  $A$  in den Dimensionen  $0, \dots, n-2$  azyklisch ist; von der  $(n-1)$ -ten Bettischen Gruppe von  $A$  wird nichts vorausgesetzt. Unter diesen Bedingungen wird eine Formel angegeben, welche die  $n$ -te Bettische Gruppe von  $R'$  durch die  $n$ -te Bettische Gruppe von  $R$ , ihre durch die in  $A$  liegenden Zyklen bestimmte Untergruppe und die Gruppe aller in  $R$  berandenden  $(n-1)$ -dimensionalen Zyklen von  $A$  in einfacher Weise ausdrückt. *P. Alexandroff* (Moskau).

**Richardson, Moses: The relative connectivities of symmetric products.** Bull. Amer. Math. Soc. 41, 528—534 (1935).

Ist  $K$  ein  $n$ -dimensionaler Komplex, so bilden die nichtgeordneten Punktepaare  $(P, Q) = (Q, P)$  von  $K$  das sog. symmetrische Produkt  $k$ . Auf ihm bilden die Punkte  $(P, P)$  einen mit  $K$  homöomorphen Teilkomplex  $k^\circ$ . Es werden die Zusammenhangszahlen von  $k \bmod k^\circ$ , also die Bettischen Zahlen  $\bmod k^\circ$  und  $\bmod 2$ , aus den Zusammenhangszahlen von  $K$  berechnet. Ist  $K$  insbesondere eine im euklidischen  $R^{n+1}$  liegende  $n$ -dimensionale geschlossene analytische Mannigfaltigkeit, so bilden die Sehnen von  $K$  einen Komplex, der zum symmetrischen Produkt  $k$  homöomorph ist. Dann besteht nach Morse eine Beziehung zwischen den Zusammenhangszahlen  $\bmod k^\circ$  von  $k$  und der Anzahl der nicht ausgearteten kritischen Sehnen von  $K$ , das sind solche Sehnen, die in beiden Endpunkten auf  $K$  senkrecht stehen. Die Formel des Verf. gestattet, für jede beliebige analytische Mannigfaltigkeit  $K$ , deren Zusammenhangszahlen bekannt und deren kritische Sehnen alle nichtausgeartet sind, eine untere Schranke für die Anzahl der kritischen Sehnen anzugeben. *H. Seifert* (Dresden).

**Wilder, R. L.: On free subsets of  $E_n$ .** Fundam. Math. 25, 200—208 (1935).

Eine Punktmenge  $M$  des  $R$  heißt nach Borsuk frei (in diesem  $R$ ), wenn sie bei jedem  $\varepsilon$  mittels einer  $\varepsilon$ -Überführung in eine zu  $M$  fremde Punktmenge transformiert werden kann. Verf. hat früher in Beantwortung einer Frage von Borsuk bewiesen, daß für  $n \leq 3$  jedes freie  $(n-1)$ -dimensionale lokal-zusammenziehbare Kontinuum  $FR$ , welches den  $R$  zerlegt, eine geschlossene Mannigfaltigkeit (der Dimensionen 1 bzw. 2) ist. Jetzt wird dieser Satz für ein beliebiges  $n$  bewiesen, wobei allerdings unter Mannigfaltigkeit eine generalized closed manifold im Sinne des Verf. (vgl. dies. Zbl. 10, 181) zu verstehen ist. Es gilt sogar ein insofern noch allgemeinerer Satz, als die Voraussetzung der lokalen Zusammenziehbarkeit durch die schwächere Voraussetzung des lokalen Zusammenhanges (für die Dimensionszahlen zwischen 0 und  $n-3$  inkl.)

im Homologiesinne ersetzt werden kann. Verf. beweist noch eine Reihe weiterer Sätze aus demselben Ideenkreis.

*P. Alexandroff* (Moskau).

**Steenrod, Norman E.: On universal homology groups.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 482—484 (1935).

Es wird der Aufbau einer Homologietheorie der unendlichen Komplexe, fußend auf dem Begriff des unendlichen algebraischen Komplexes (es kommt nur auf die unendlichen Zyklen an), skizziert. Die Bettischen Gruppen — gleich topologisiert — treten als Limesgruppen inverser Homomorphismenfolgen auf (die Folge entsteht, wenn der unendliche Komplex  $K$  als Summe seiner wachsenden endlichen Teilkomplexe betrachtet). Als Koeffizientenbereich wird — in voller Allgemeinheit — ebenfalls eine topologische Gruppe betrachtet. Das Hauptresultat ist: Die Bettischen Gruppen nach einem beliebigen Koeffizientenbereich lassen sich durch diesen Koeffizientenbereich und die Bettischen Gruppen nach dem Koeffizientenbereich  $X_1$  der modulo 1 reduzierten reellen Zahlen rein algebraisch ausdrücken. Mit anderen Worten: Der Koeffizientenbereich  $X_1$  ist ein universeller Koeffizientenbereich für die „unendliche“ Homologietheorie der unendlichen Komplexe. Approximiert man einen gegebenen kompakten metrischen Raum mittels eines unendlichen Komplexes (was man — nach Lefschetz — durch eine Modifikation der Projektionsspektren immer tun kann), so läßt sich dieses Resultat auch für beliebige kompakte metrische Räume, und zwar für die gewöhnliche Homologietheorie dieser Räume aussprechen: Der Koeffizientenbereich  $X_1$  ist ein universeller Koeffizientenbereich für die Homologietheorie eines beliebigen kompakten metrischen Raumes. Hiermit wird eine Vermutung des Ref. [Ann. of Math. **36**, 1—36 (1935); dies. Zbl. **11**, 39] bestätigt. Verf. schließt seine Note mit folgendem Satz: Eine kompakte zusammenhängende topologische Abelsche Gruppe mit 2. Abzählbarkeitsaxiom ist mit ihrer eindimensionalen Bettischen Gruppe in bezug auf  $X_1$  (stetig) isomorph. Wegen der vollständigen Beweise verweist der Verf. auf eine später zu erscheinende ausführlichere Darstellung.

*P. Alexandroff*.

**Alexander, J. W.: On the chains of a complex and their duals.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 509—511 (1935).

Es sei in irgendeinem Komplex (oder allgemeiner, Eckpunktbereich)  $f' = tx'$  ein algebraischer Komplex mit nur einem Simplex  $x'$ ; der Koeffizient  $t$  sei irgendeinem Koeffizientenbereich entnommen. Es seien  $r_0^{-1}, x_1^{-1}, \dots, x_r^{-1}$  die  $(r-1)$ -dimensionalen Seiten von  $x'$ , so orientiert, daß jede von ihnen im Rande von  $x'$  mit dem Koeffizienten  $+1$  auftritt; dann ist bekanntlich der Rand von  $f'$  der algebraische Komplex  $\sum tx_i^{r-1}$ . Liegt ein beliebiger algebraischer Komplex  $f' = \sum t^i x^i = \sum f_i^i$  vor, so ist der Rand von  $f'$  die Summe der Ränder der  $f_i^i$ . In einer dazu dualen Weise betrachtet Verf. diejenigen  $x_h^{r+1}$ , die auf ihrem Rande das orientierte Simplex  $x'$ , und zwar mit dem Koeffizienten  $+1$  enthalten; die über diese  $x_h^{r+1}$  erstreckte Summe  $\sum t^h x_h^{r+1}$  ist der duale Rand (die „Ableitung“) von  $tx'$ ; für  $f' = \sum t^i x_i^r = \sum f_i^i$  ist der duale Rand die Summe der dualen Ränder der einzelnen  $f_i^i$ . Der Begriff des dualen Randes führt in der üblichen automatischen Weise zum Zyklus- und Homologiebegriff sowie zum Begriff der dualen Bettischen Gruppen. Dabei ist die duale Bettische Gruppe die Charakterengruppe der gewöhnlichen Bettischen Gruppe (vorausgesetzt daß es sich um Koeffizientenbereiche handelt, die Charakterengruppen voneinander sind). Verf. führt noch einen wichtigen Begriff ein, der bei dem (in der Arbeit nicht wiedergegebenen) Beweise des letzteren Satzes eine Rolle spielen dürfte. Sind  $A$  und  $B$  zwei duale Koeffizientenbereiche (also Charakterengruppen voneinander),  $a$  ein Element von  $A$ ,  $b$  ein Element von  $B$ , so ist — da  $b$  Charakter von  $A$  ist —  $b(a)$  ein Element der Gruppe  $K$  der modulo 1 reduzierten reellen Zahlen.  $b(a)$  bezeichnen wir als  $a \times b$ . Dieser Multiplikationsbegriff ist zweifach distributiv. Ist  $f' = \sum a^i x_i^r$  ein algebraischer Komplex des Koeffizientenbereiches  $A$  und  $h' = \sum b^i x_i^r$  ein algebraischer Komplex des Koeffizientenbereiches  $B$ , so ist  $f' \times h' = \sum a^i b^i$  ein



Element von  $K$ ; es heißt das Integral von  $h^r$  über  $f^r$ . Es gilt der Satz: Das Integral über den dualen Rand von  $h^{r-1}$  über  $f^r$  ist gleich dem Integral von  $h^{r-1}$  über den gewöhnlichen Rand von  $f^r$ ; aus diesem Satz folgen naheliegende Korollare. Der Ref. bemerkt zum Schluß, daß dieselben Begriffsbildungen und Sätze auch von Kolmogoroff gefunden und im Juni 1934 an der Internationalen Konferenz über Tensoranalysis in Moskau vorgetragen wurden; die diesbezügliche Arbeit von Kolmogoroff befindet sich im Druck.

*P. Alexandroff* (Moskau).

Alexander, J. W.: On the ring of a compact metric space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 511—512 (1935).

$C$  sei ein kompakter metrischer Raum,  $A$  eine additive Abelsche Gruppe. Man betrachtet eine schief-symmetrische Funktion  $F(p_0 p_1 \dots p_r)$  von  $r+1$  Punkten in  $C$ ; die Werte der Funktion sind Elemente von  $A$ . Die Funktion  $F$  ist lokal-verschwindend, wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt von der Eigenschaft, daß  $F(p_0 p_1 \dots p_r) = 0$  ist, sobald der Durchmesser der Punktmenge  $(p_0, p_1, \dots, p_r)$  kleiner als  $\varepsilon$  ist. Als Ableitung  $\delta F$  wird definiert

$$\delta F(p_0 p_1 \dots p_{r+1}) = \sum (-1)^i F(p_0 p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r).$$

Die Ableitung spielt die Rolle des Randes (sie ist der Ableitung oder dem dualen Rande — vgl. das vorst. Ref. — nachgebildet). Sodann hat man wieder den Begriff des Zyklus, der Homologie, der Bettischen Gruppen — diesmal für beliebige kompakte Räume. Die so gewonnenen Bettischen Gruppen sind in demselben Sinne wie im vorstehenden Referate zu den gewöhnlichen Bettischen Gruppen eines kompakten Raumes (Vietoris, Lefschetz usw.) dual. In der Arbeit wird noch eine Art Multiplikation für die obigen Funktionen  $F$  definiert:

$$F \times G = \frac{1}{(r+1)!(s+1)!} \sum (-1)^{Na} F(p_0 \dots p_r) G(q_0 \dots q_s),$$

wobei die Summe über alle Permutationen der  $r+s+1$  Punkte  $p_i$  und  $q_j$  erstreckt ist und  $Na$  gleich 0 oder 1 ist, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade ist. Diese Multiplikation ist assoziativ und bis auf das Vorzeichen kommutativ. Sie enthält ferner die obige Randbildung (die Bildung der Ableitung) als Spezialfall:  $\delta F = \delta \times F$ , wobei  $\delta$  die Punktfunktion ist, welche für jeden Punkt des Raumes den Wert 1 hat. Das Produkt zweier Zyklen ist (entgegen der Behauptung des Verf.) stets Null. Dieses Versehen ist übrigens (wie aus einem im September 1935 am Moskauer Internationalen Topologen-Kongreß gehaltenen Vortrage des Verf. hervorgeht) auch dem Verf. selbst bekannt, welcher übrigens im Besitze einer anderen Produktdefinition ist, die — angewandt auf Zyklen — zu neuen topologischen Invarianten führt. *P. Alexandroff*.

## Relativitätstheorie.

● Synge, J. L.: Principal null-directions defined in space-time by an electromagnetic field. (Univ. of Toronto studies, appl. math. ser. Nr. 1.) Toronto: Univ. of Toronto press 1935. 50 S.

In a space-time of fundamental tensor  $g_{pq}$  a principal direction  $\xi^p$  of a tensor  $\Phi_{pq}$  is given by

$$\Phi_{pq}\xi^q + X\xi_p = 0,$$

where  $X$  is one of the four roots of the determinantal equation

$$|\Phi_{pq} + Xg_{pq}| = 0. \quad (1)$$

Restricting himself to Galilean space-time, the author finds the principal directions associated with the electromagnetic energy-tensor  $E_{pq}$  and with the electromagnetic six-vectors  $F_{pq}$  and  $iF_{pq}^*$ ,  $F_{pq}^*$  being the dual of the tensor  $F_{pq}$ . In the case of  $E_{pq}$  equation (1) has only two distinct roots, equal in magnitude but opposite in sign, and the principal directions are confined to two planes but are otherwise indeterminate. One of these planes does not cut the null cone, but the other cuts it in two lines whose directions are called the principal null directions for the energy-tensor. Detailed consideration is given to special cases, and similar results are obtained for the two six-vectors. The results are then used to show that the arbitrary assignment of two null vectors and two scalars determines a unique electromagnetic field,

which is afterwards described physically in terms of the space and time of an arbitrary Galilean observer. One section of the paper is devoted to showing the connection of the present work with Whittaker's theory of calamoids [tubes of force in four dimensions — see Proc. Roy. Soc. Edinburgh 42, 1—23 (1922)].

H. S. Ruse (Edinburgh).

**Boneff, N.:** La loi de la gravitation dans la théorie de la relativité et le problème de Bertrand. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 30, 1—6 u. franz. Zusammenfassung 7 (1934) [Bulgarisch].

**Halpern, O., and G. Heller:** On the Dirac electron in a gravitational field. Physic. Rev., II. s. 48, 434—438 (1935).

Die Paulische Übertragung der Diracschen Theorie in die allgemeine Relativitätstheorie [Ann. Physik 18, 337 (1933); dies. Zbl. 8, 37] wird auf zwei spezielle Fälle angewandt: Erstens wird gezeigt, daß das Diracsche Elektron eine „Atomuhr“ im Sinne von Einstein ist, also die richtige Rotverschiebung im Schwerfeld ergibt. Als zweites wird der gyromagnetische Effekt behandelt und gezeigt, daß keine universelle Beziehung zwischen Umlauffrequenz und Magnetfeld besteht, sondern Abhängigkeit vom Zustande des Elektrons. Die Interpolationsformel zwischen den beiden Grenzfällen  $L_z = 0$  und  $L_z \gg \text{Spin}$  ist analog zu den Landéschen Formeln gebaut.

S. Flüge (Leipzig).

**McVittie, G. C.:** Absolute parallelism and metric in the expanding universe theory. Proc. Roy. Soc. London A 151, 357—370 (1935).

Es wird gezeigt, wie man eine sehr allgemeine Theorie der sich ausdehnenden Welt aufbauen kann durch a priori-Vorgabe einer (prinzipiell beliebigen) festen Transformationsgruppe der Weltkoordinaten  $x^\alpha$ , die dann eine bestimmte Art von Fernparallelismus nach sich zieht. Damit erhält man „Stromlinien“ einer (drucklosen) „Materie“, von der angenommen wird, daß sie sich durch eine gewöhnliche Vektordichte  $\mathfrak{S}^\alpha$  (im Sinne der affinen Geometrie) und ferner durch die Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \mathfrak{S}^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$  charakterisieren lasse. Metrische Betrachtungen werden erst benötigt von dem Augenblick an, wo man etwa Korrelationen zwischen Geschwindigkeit und Entfernung eines Materiepartikels zu behandeln wünscht. Die Arbeit scheint der Absicht zu entspringen, gewisse Gedanken der bekannten Lorentzinvarianten Kosmologie von Milne auf allgemeine Räume zu übertragen.

Heckmann.

**Hosokawa, Tôyomon:** On the foundation of the geometry in microscopic and macroscopic space. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 141—149 (1935).

Die von Pauli, Veblen und Verf. benutzten Diracschen Matrizen  $\alpha_{i,B}^A$ , welche verschieden sind, da die Bestimmungszahlen von  $g_{ik}$  in diesen Theorien verschieden sind, werden angeschrieben. Die Übertragungsparameter in der Raum-Zeit-Welt und im Spinraum werden abgeleitet aus der Forderung  $V_\mu \alpha_{i,B}^A = 0$ .

J. Haantjes.

**Morinaga, Kakutarô:** Wave geometry. (Geometry in microscopic space.) J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 151—188 (1935).

Dieser Arbeit wird der Ausdruck für die „Metrik“  $ds\psi = \gamma_i^A dx^i \psi$  zugrunde gelegt (vgl. Y. Mimura, dies. Zbl. 11, 231).  $\gamma_i$  genügt der Gleichung  $\gamma_i \gamma_j = g_{ij}$ , wo  $g_{ij}$  der Fundamentaltensor der Raum-Zeit-Welt  $X_4$  ist. Verf. betrachtet die folgenden Transformationen: 1. Koordinatentransformationen in  $X_4$ , 2. Koordinatentransformationen im Spinraum, 3. die Transformationen  $\gamma_i \rightarrow \gamma'_i$ , wobei  $\gamma'_i \gamma'_j = g_{ij}$  und  $ds\psi = 0$  invariant ist ( $G$ -Transformationen). Die Forderung für die Übertragung ist:  $ds\psi = 0$  ist invariant, d. h.: Ist  $\gamma_i dx^i \psi = 0$  im Punkte  $P$ , so soll auch  $\gamma'_i dx'^i \psi$  im benachbarten Punkte  $Q$  verschwinden, wenn  $dx'^i$  und  $dx^i$  pseudoparallel sind. Verf. beweist, daß dann für  $\psi$  eine Differentialgleichung  $\partial_j \psi^A = \theta_{j,B}^A \psi^B$  gilt, und gibt den Zusammenhang zwischen  $\theta_{j,B}^A$  und den Übertragungsparametern  $I_{ji}^h$  ( $V_j g_{ik}$  braucht nicht Null zu sein). Diese Differentialgleichung (verallgemeinerte Diracsche Gleichung) ist invariant bei  $G$ -Transformationen. Die Integrabilitätsbedingungen



dieser Gleichung werden aufgestellt. Ist der Fundamentaltensor positiv definit und sind die betrachteten Größen reell, so folgt aus diesen Bedingungen

$$\frac{1}{2} g^{-\frac{1}{2}} e_{ihlm} R_{kj}^{lm} = \pm R_{kj[ih]} \quad (1)$$

( $g = \text{Det}(g_{ih})$ ;  $e_{ihlm}$  ist die kovariante Quadrivektordichte vom Gewicht  $-1$ ), woraus hervorgeht, daß die Übertragung im Riemannschen Fall Einsteinsch ist.

*J. Haantjes* (Delft).

**Sibata, Takasi: A first approximate solution of the Morinaga's equation:**

$$\frac{\sqrt{A}}{2} \varepsilon_{stpq} K_{lm}^{stpq} = K_{lmst}. \quad \text{J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 189—203 (1935).}$$

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Gleichung von Morinaga (Gleichung (1) des vorhergehenden Referates) im Riemannschen Fall zu lösen. Es ist also  $I_{ji}^h = \{j_i^h\}$  und  $R_{kji}^{h..} = K_{kji}^{h..}$  ( $n = 4$ ). Die Unbekannten sind die Bestimmungszahlen von  $g_{ih}$ . Man findet eine annähernde Lösung, wenn man ansetzt  $g_{ih} \approx \delta_{ih} + h_{ih}$ , wo die Bestimmungszahlen von  $h_{ih}$  infinitesimal erster Ordnung sind, und Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt. Man erhält für  $g_{ih}$  partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die  $\square g_{ih} = 0$  zur Folge haben. Wählt man drei der Bestimmungszahlen z. B.  $g_{23}$ ,  $g_{31}$  und  $g_{12}$  derart, daß  $\square g_{23} = \square g_{31} = \square g_{12} = 0$  ist, so sind die übrigen Bestimmungszahlen schon bestimmt. Im allgemeinen verschwindet der zu dieser Lösung gehörige Krümmungsaffinor nicht.

*J. Haantjes* (Delft).

**Mimura, Yosita, and Toranosuke Iwatsuki: Theory of gravitation based on wave geometry.** J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 205—215 (1935).

In dieser Arbeit werden die aus der Invarianz von  $ds^2 = 0$  abgeleiteten Gleichungen diskutiert für den Riemannschen Fall, d. h. für  $I_{ji}^h = \{j_i^h\}$  (vgl. die zwei vorhergehenden Referate). Aus der Morinagaschen Gleichung folgt die Einsteinsche Gleichung  $K_{ij} = 0$ , aber nicht umgekehrt. Man braucht die Gleichung  $K_{ij} = 0$  also nicht zu postulieren, denn man bekommt diese Gleichung in ganz natürlicher Weise. Wie T. Sibata gezeigt hat, folgen Wellengleichungen für  $g_{ij} \approx \delta_{ij} + h_{ij}$ , die man als eine Linearisierung der Gleichung  $\square h_{ij} = 0$  auffassen kann und der Form nach den Maxwell'schen Gleichungen ähnlich sind. (Aus  $K_{ij} = 0$  folgt unter einigen Voraussetzungen auch  $\square h_{ij} = 0$ .)

*J. Haantjes* (Delft).

## Quantentheorie.

**Japolsky, N. S.: Rotating electromagnetic waves.** Philos. Mag., VII. s. 19, 934—958 (1935).

Verf. untersucht axialsymmetrische Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen von der Form  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0(r) e^{i(2t + kz + n\varphi)}$  ( $z, r, \varphi$  = zylindrische Koordinaten) und macht einige — leider physikalisch unrichtige — Hinweise auf den möglichen Zusammenhang dieser Wellen mit den de Broglieschen Materiewellen. *V. Fock* (Leningrad).

**Japolsky, N. S.: A theory of elementary particles. I.** Philos. Mag., VII. s. 20, 417 bis 468 (1935).

Verf. erstrebt das — leider unerreichbare — Ziel, ein makroskopisches Modell der Elementarteilchen (Elektron, Proton, Positron, Lichtquant usw.) auf elektromagnetischer Grundlage zu konstruieren, welches imstande wäre, die Quantenmechanik zu ersetzen. (Vgl. vorsteh. Ref.)

*V. Fock* (Leningrad).

● **Gans, Richard, und Bernhard Mrowka: Beitrag zur Störungstheorie in der Wellenmechanik.** (Sehr. Königsberg. gel. Ges. Jg. 12, II. 1.) Halle a. d. S.: Max Niemeyer 1935. 30 S. RM. 2.80.

Es wird ein einfaches Störungsverfahren für die Schrödingergleichung entwickelt, indem die gestörte Lösung in der Form  $\Psi_0 e^{\psi}$  angesetzt wird, wodurch für  $\psi$  eine Störungsgleichung resultiert, welche nicht  $\psi$  selbst, sondern nur ihre Ableitungen enthält. Die Vorteile der Methode werden an einer Reihe von Beispielen (helium-

ähnliche Atome und Moleküle, Starkeffekt, Polarisierbarkeiten, Diamagnetismus und Dispersion) erläutert. *O. Klein (Stockholm).*

**Destouches, Jean-Louis:** *Théorie du centre de gravité en mécanique ondulatoire et applications.* J. Physique Radium, VII. s. 6, 329—335 (1935).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit desselben Verf. (dies. Zbl. 9, 418) wird der Begriff des Schwerpunkts in der Quantenmechanik der Partikelsysteme betrachtet und für die Aufstellung einer Art von Diracgleichung für Atomkerne verwertet.

*O. Klein (Stockholm).*

**Bhabha, H. J.:** *On the calculation of pair creation by fast charged particles and the effect of screening.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 394—406 (1935).

Die Arbeit enthält die Einzelheiten von Rechnungen, deren Grundlagen und physikalische Konsequenzen in einer Arbeit in den Proc. Roy. Soc. diskutiert werden sollen.

*Casimir (Leiden).*

**Mamasachlisov, V.:** *Genauigkeit der Formel von Bethe und Peierls.* Z. eksper. teoret. Fis. 5, 677—680 (1935) [Russisch].

Um die Genauigkeit der Formel von Bethe und Peierls zu prüfen, wird in der vorliegenden Arbeit Querschnitt des Deutons als Reihe berechnet, entwickelt nach dem Exponenten  $r_0$ , worin  $r_0$  die größte Breite der Potentialbarriere ist. Das erste Glied dieser Reihe entspricht der Formel von Bethe und Peierls. Die Berechnung des zweiten Gliedes zeigt, daß die von diesen Autoren gefundene Abhängigkeit von der Frequenz in Geltung bleibt aber daß die Koeffizienten größenordnungsmäßig richtig sind.

*Autoreferat.*

**Oppenheimer, J. R., and M. Phillips:** *Note on the transmutation function for deuterons.* Physic. Rev., II. s. 48, 500—502 (1935).

Nach Lawrence und Mitarbeitern [Physic. Rev. 48, 493 (1935)] sind die Wirkungsquerschnitte für die Umwandlung durch Deuteronen unter Einfangung des Neutrons und Reemission des Protons größer und wachsen weniger rasch mit der Geschwindigkeit des Deuterons an als nach der Gamowschen Theorie der Eindringung einer Punktladung in das Kernpotential. Dies wird zurückgeführt 1. auf den nach der Unbestimmtheitsrelation aus der geringen Bindungsenergie folgenden großen Radius des Deuterons, 2. auf seine damit zusammenhängende große Polarisierbarkeit. Beide Effekte bewirken, daß das Neutron schon im Mittelpunkt des gestoßenen Kerns sein kann, wenn der Schwerpunkt des Deuterons noch ziemlich weit entfernt ist. In der Rechnung muß wegen der geringen Geschwindigkeit der Deuteronen die Änderung des Kernfelds als nahezu adiabatisch angesehen werden; die Abweichung vom adiabatischen Verlauf liefert die Übergangswahrscheinlichkeit in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung.

*C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).*

**Goeppert-Mayer, M.:** *Double beta-disintegration.* Physic. Rev., II. s. 48, 512 bis 516 (1935).

Die Existenz stabiler Isobare, die durch die gleichzeitige Emission zweier Elektronen (und Neutrinos) ineinander übergehen könnten, beweist empirisch die geringe Wahrscheinlichkeit solcher Doppelprozesse. Nach der Theorie von Fermi ergibt sich durch eine Rechnung 2. Näherung eine Lebensdauer von  $10^{17}$  Jahren selbst bei einer Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endkern von 20 mc<sup>2</sup>. Die Möglichkeit einer Abänderung durch die Ansätze von Konopinski und Uhlenbeck [Physic. Rev. 48, 7 (1935); dies. Zbl. 12, 91] und Bethe und Peierls (Diskussion zu G. Beck, dies. Zbl. 12, 91) ist noch nicht berücksichtigt.

*C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).*

**Taylor, H. M.:** *Some properties of dipole and quadripole radiation from nuclei.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 407—415 (1935).

Verf. untersucht das Strahlungsfeld eines sich in einem Zentralfeld bewegenden spinlosen Teilchens. Der Übergang  $l = 1 \rightarrow l = 0$  ist auch dann möglich, wenn das (statische) Dipolmoment der zugeordneten Ladungsdichte verschwindet; das Strahlungsfeld stimmt auch in diesem Fall überein mit dem Feld eines klassischen Dipols.

Das bei einem Übergang  $l = 2 \rightarrow l = 0$  oder  $l = 1 \rightarrow l = 1$  emittierte Strahlungsfeld kann immer aufgefaßt werden als Superposition der zu einfachen Quadrupolen verschiedener Orientierung gehörigen Strahlungsfeldern. *Casimir* (Leiden).

**Weizsäcker, C. F. v.:** Zur Theorie der Kernmassen. Z. Physik **96**, 431—458 (1935).

Es wird versucht, die Massendefekte der Atomkerne unter Zugrundelegung des Majoranaschen Wechselwirkungsgesetzes zu berechnen mit Hilfe einer verfeinerten Thomas-Fermischen Methode. Die Verfeinerung besteht darin, daß zu dem üblichen Ausdruck für die Energiedichte ein Glied mit  $(\text{grad } \rho)^2 / \rho$  ( $\rho$  Teilchendichte) addiert wird; dieses Glied führt zu einer Verschmierung des Kernrandes (wie nach der Unbestimmtheitsrelation zu fordern ist) und zu einer Oberflächenenergie. Durch geeignete Wahl der in seinen Formeln auftretenden Konstanten gelangt Verf. zu einer halbempirischen Darstellung der Massendefekte. Für die Konstanten in dem Majoranaschen Wechselwirkungsgesetz ergeben sich Werte, die nicht übereinstimmen mit denjenigen, die von Wigner aus dem Massendefekt des Heliums abgeleitet wurden. *Casimir*.

**Flügge, S.:** Zum Aufbau der leichten Atomkerne. Z. Physik **96**, 459—472 (1935).

Unter Zugrundelegung der von v. Weizsäcker angegebenen Gleichungen werden die Massendefekte der leichten Kerne genauer berechnet. Für die Konstanten des Majoranaschen Gesetzes ergeben sich wieder Werte, die nicht mit den Wignerschen übereinstimmen. (Vgl. vorst. Referat.) *Casimir* (Leiden).

**Heisenberg, W.:** Die Struktur der leichten Atomkerne. Z. Physik **96**, 473 bis 484 (1935).

Die Massendefekte der leichten Atomkerne werden nach einem vereinfachten Hartreeschen Verfahren berechnet. Für die Konstanten des Wechselwirkungsgesetzes ergeben sich Werte, die erheblich besser mit den Wignerschen übereinstimmen als diejenigen, die man durch Anwendung des Thomas-Fermischen Verfahrens erhält. Die Fehler der Methode werden diskutiert. *Casimir* (Leiden).

**Markov, M.:** Über das Diracsche Vektormodell für Multiplettspektren. Ž. eksper. teoret. Fis. **5**, 478—484 u. deutsch. Zusammenfassung 485 (1935) [Russisch].

Verf. zeigt, daß für äquivalente Elektronen eines Atoms die Störungsenergie  $H$  in der Form  $H = \sum \alpha_k F_k$  geschrieben werden kann, wo die  $F_k$  gewisse Integrale über radiale Wellenfunktionen und die  $\alpha_k$  Matrizen sind, die als Polynome in der Matrix für das skalare Produkt der Bahnmomente ausgedrückt werden können. Für die  $p$ - und  $d$ -Terme werden diese Polynome explizite hingeschrieben. Diese Darstellung der Störungsenergie ermöglicht eine einfache Lösung der Säkular determinante für den Fall  $M = 0$ ,  $S = 0$ . [Vgl. M. Markov, Physik Z. Sowjetunion **7**, 553 (1935); dies. Zbl. **12**, 182.] *V. Fock* (Leningrad).

**Yamanouchi, Takahiko:** On the calculation of atomic energy levels. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 274—288 (1935).

Die Theorie der Darstellung der Permutationsgruppen wird auf die Berechnung der Energieniveaus der verschiedenen Multiplettsysteme eines Kernatoms mit vielen Elektronen angewandt. *O. Klein* (Stockholm).

**Eliašević, M.:** Über die Wellengleichung des dreiatomigen Moleküls. Ž. eksper. teoret. Fis. **5**, 232—243 (1935) [Russisch].

Unter Anwendung Jacobischer Koordinaten leitet Verf. die Wellengleichung für die Rotations- und Vibrationsfreiheitsgrade eines mehratomigen Moleküls ab. Diese Gleichung wird auf den Fall eines dreiatomigen Moleküls spezialisiert und einer weiteren Umformung unterworfen, die den Zweck hat, eine für die Anwendung der Störungstheorie geeignete Form zu erzielen. Zum Schluß wird die Wellengleichung für ein symmetrisches dreiatomiges Molekül betrachtet. *V. Fock* (Leningrad).

**Frerichs, Rudolf:** Diskontinuierliche Molekelspektren. I. Physik regelm. Ber. **3**, 179 bis 192 (1935).

**Sirkar, S. C., and Dwijesh Chakravarty:** A bibliography of the Raman effect. III. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. **9**, 553—622 (1935).



● **Fermi, Enrico: Molecole e cristalli.** Bologna: Nicola Zanichelli 1934. 303 pag. e 49 fig. rilegato L. 50.—

Das vorliegende Buch enthält drei Abschnitte: Moleküle, Kristalle und Quantenstatistik. Der erste Abschnitt behandelt zunächst in bemerkenswerter Kürze die Molekularkräfte, heteropolare und homöopolare Bindung, sowie van der Waals-Kräfte. Sodann wird die Zerlegung der Terme zweiatomiger Moleküle in Elektronenterme, Schwingung und Rotation eingehend besprochen. Die Berechnung der Dissoziationsenergie aus den Schwingungsniveaus wird erklärt. Es folgen die verschiedenen Kopplungsschemata zwischen Bahnmoment der Elektronen, Spin und Molekülrotation. Dann werden die Symmetrieeigenschaften der Eigenfunktionen abgeleitet und auf die Bestimmung von Kernstatistik aus Bandenspektren angewendet. Isotopeneffekt in Schwingung und Rotation, Zeemaneffekt, Starkeffekt und Raman-effekt bilden den Abschluß der Diskussion der Spektren zweiatomiger Moleküle. Anschließend werden die thermischen Eigenschaften solcher Moleküle behandelt — spezifische Wärme, Entropiekonstante und Intensitätsverteilung in Banden. In dem folgenden Kapitel über mehratomige Moleküle werden zunächst die geometrischen Eigenschaften und elektrischen Momente und Polarisierbarkeiten diskutiert, während der zweite Teil des Kapitels im wesentlichen den Schwingungen mehratomiger Moleküle und ihrer Bestimmung aus Ultrarotspektrum und Ramaneffekt gewidmet ist. — Der zweite Abschnitt beginnt mit der Geometrie der Kristallgitter. Von physikalischen Eigenschaften werden behandelt die spezifische Wärme, Schwingungen, Ultrarotspektren und Ramaneffekt, thermische Ausdehnung und Leitfähigkeit, Energie der Ionengitter und Lichtabsorption. — Die Behandlung der Quantenstatistik im dritten Abschnitt beginnt mit Anwendung der Boltzmannformel auf die Besetzung verschiedener Quantenzustände. U. a. wird die Plancksche Formel abgeleitet, das Gleichgewicht zwischen einem Atom und der Strahlung betrachtet, die Suszeptibilität paramagnetischer Gase und das Nernstsche Gesetz abgeleitet. Erst dann werden die Bose- und Fermistatistik eingeführt und die erstere auf das Lichtquantengas, die letztere auf die Elektronen im Atom angewandt. *Bethe (Ithaka).*

● **Fröhlich, Herbert: Berechnung der Austrittsarbeit im Sommerfeldschen Metallmodell.** Physik. Z. Sowjetunion 7, 509—510 (1935).

Elementare Ableitung des Satzes, daß die Austrittsarbeit für ein Metall mit „freien“ Elektronen gleich der Fermienergie des Elektronengases ist. *Bethe.*

● **Šubin, S.: Über Anwendung der Methode der Diracschen Dichtematrix auf die Theorie der Metalle.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 15—18 (1935).

Es wird gezeigt, daß sich mit Hilfe der Diracschen Dichtematrix für eine statische Gesamtheit die Formeln über die Beschleunigung der Metallelektronen in äußeren Feldern direkt (d. h. ohne den Umweg über Wellenpakete der Einzelelektronen) gewinnen lassen. *Nordheim (Lafayette, Indiana).*

● **Laue, M. v.: Die Fluoreszenzröntgenstrahlung von Einkristallen. (Mit einem Anhang über Elektronenbeugung.)** Ann. Physik, V. F. 23, 705—746 (1935).

Die neuerdings von Kossel und Mitarbeitern [Ann. Physik, V. F. 23 (1935)] beschriebenen Röntgeninterferenzerscheinungen, wobei die Strahlungsquelle ein Atom im Kristallgitter ist, werden mit Hilfe des optischen Reziprozitätssatzes (Satz von der Unveränderlichkeit der Lichtintensität und der optischen Länge des Lichtweges bei Vertauschung von Lichtquelle und Aufpunkt) und der Ewaldschen Theorie der Röntgeninterferenzen gedeutet. Wegen des Reziprozitätssatzes kann die Intensität der in eine bestimmte Richtung ausgesandten Interferenzstrahlung, wenn ein bestimmtes Atom im Gitter als Strahlungsquelle dient, aus demjenigen Wert des Verschiebungsvektors am Ort des Atoms berechnet werden, der einer einfallenden Welle von der angegebenen Richtung entspricht. Dabei wird die Ewaldsche Theorie in der von Laue angegebenen Form benutzt (Verwendung einer räumlich kontinuierlichen Elektrizitätsverteilung im Kristall). Entsprechende Überlegungen werden für Elektroneninterferenzen gemacht, wobei die Kikuchiliniolen als das Analogon der Kosselschen Interferenzen gedeutet werden. *Waller (Upsala).*

● **Carrelli, A.: Sul campo agente nell'interno dei ferromagnetici.** Nuovo Cimento, N. s. 12, 337—341 (1935).

Eine Ableitung des Ref. (dies. Zbl. 7, 269) für die bekannte Tatsache, daß das im Innern eines Ferromagnetikums auf ein geladenes Teilchen wirkende Magnetfeld

gleich der magnetischen Induktion  $\mathfrak{B}$  ist, sofern der Magnetismus von atomaren Kreisströmen herrührt, enthält eine Lücke. Verf. sucht aus Messungen über die Drehung der Polarisationssebene von Licht, das eine dünne ferromagnetische Schicht durchsetzt, und über den Halleffekt von Stahl zu schließen, daß das wirksame Feld proportional zur Magnetisierung  $\mathfrak{M} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{H})/4\pi$  sei. (Der genannte Beweis läßt sich jedoch streng führen [vgl. P. Hertz, Handbuch d. Physik 15, 134ff.]. War bei den Messungen eine sichere Unterscheidung zwischen  $\mathfrak{B}$  und  $4\pi\mathfrak{M}$  möglich? D. Ref.)

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

**Mitchell, K.:** The temperature dependence of the photo-electric effect. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 416—428 (1935).

Die Übergangswahrscheinlichkeit eines Metallelektrons von einem (an das Metall) gebundenen in einen freien Zustand unter dem Einfluß von Licht enthält als Faktor den Durchlässigkeitskoeffizienten der Metalloberfläche für das austretende Elektron. Dieser geht bei abnehmender Energie des Elektrons gegen einen endlichen Wert, wenn angenommen wird, daß die Bildkraft auf das Elektron wirkt (oder irgendeine andere langsam veränderliche Kraft). Unter diesen Umständen ergibt sich die Intensität des Photoeffekts nahe der Schwelle als proportional  $T^2$  mal einer Funktion

von  $\frac{h(\nu - \nu_g)}{kT}$  ( $\nu$  = Frequenz des eingestrahnten Lichts,  $\nu_g$  = Grenzfrequenz). Auf dieser Tatsache, die bisher nicht streng bewiesen war, haben Fowler und Du Bridge Methoden zur Bestimmung der Grenzfrequenz aufgebaut. Mitchell zeigt, daß Du Bridges Methode weniger von den speziellen Übergangswahrscheinlichkeiten abhängt und daher vorzuziehen ist.

Bethe (Ithaka).

**Landau, L.:** Zur Theorie der Bremsung schneller Elektronen durch Strahlung. Ž. eksper. teoret. Fis. 5, 255—257 (1935) [Russisch].

Verf. gibt eine größenordnungsmäßige Abschätzung des Wirkungsquerschnittes für die Bremsstrahlung schneller Elektronen und untersucht den Gültigkeitsbereich der von Heitler aufgestellten Formel für den Wirkungsquerschnitt.

V. Fock.

**Racah, Giulio:** Production of electron pairs. Nature 136, 393—394 (1935).

Ein primäres Elektron kann im Feld eines Kerns ein Elektronenpaar erzeugen. Dieser Prozeß ist von Landau und Lifschitz sowie von Williams unter der Annahme behandelt worden, daß zwischen den Elektronen die primitive Möllersche Wechselwirkung besteht und daß das Kernfeld nur das Elektronenpaar, nicht aber das Primärelektron beeinflusst. Beide Annahmen werden von Racah als falsch nachgewiesen. Racahs Resultat für den Wirkungsquerschnitt des Prozesses unterscheidet sich von den früheren Resultaten sowohl in der Abhängigkeit von der Energie des Elektronenpaares und der des Primärelektrons, als auch im Zahlenfaktor. Die Größenordnung dagegen bleibt natürlich unverändert. Nach Racahs Formel werden besonders viele Paare hoher Energie erzeugt.

Bethe (Ithaka).

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Pollak, L. W., und F. Kaiser:** Über die numerische Methode von J. Fuhrich zur Ermittlung von Periodizitäten, ihre Erprobung und Anwendung auf die Polbewegung. Statist. Obzor 16, 13—54 (1935).

Aus  $N$  äquidistanten Ordinaten  $y_v$  wird die Reihe der „ersten Transformierten“  $y'_v$  gebildet;  $y'_v$  ist der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Reihen  $y_1, \dots, y_{N-v}$ ;  $y_{v+1}, \dots, y_N$ . Nach demselben Verfahren entstehen aus den  $y'_v$  nacheinander die höheren Transformaten  $y''^{(\alpha)}$ . Mit wachsender Ordnung  $\alpha$  streben dann die Transformaten  $y''^{(\alpha)}$  einer reinen Kosinusschwankung von derjenigen Periode zu, die unter den periodischen Bestandteilen der Ausgangsreihe die größte Amplitude hat. Diese



„Methode der Autokorrelation“ wird unter Benutzung von Hollerithmaschinen auf die Analyse fiktiver Werte und auf die Polbewegung angewendet. *J. Bartels.*

**Moiseiev, N.: On the problem of unregularized earth.** Russ. astron. J. 12, 372 bis 375 u. engl. Zusammenfassung 375 (1935) [Russisch].

Eine Erwiderung an Malkin (vgl. dies. Zbl. 11, 429), dessen kritische Bemerkungen teils auf einem Mißverständnis, teils auf rein theoretischen Grundlagen, welche keine praktische Bedeutung haben, fußen. Die von Malkin angegebene Integralgleichung ist eigentlich keine solche, da sie unter dem Integralzeichen eine von der gesuchten Geoidfigur und von den zu ihr äußeren Massen abhängige Größe  $n_e$  enthält, was ihrer Anwendung große Schwierigkeiten bereitet. *A. Michailov (Moskau).*

**Malkin, N.: On the selection of the surface of reduction of gravitational and geodetic measurements. (In connection with the question of building up Brillouin's geoid.)** Russ. astron. J. 12, 360—366 u. engl. Zusammenfassung 366—367 (1935) [Russisch].

Verf. macht kritische Bemerkungen über den Vorschlag von Numerov (vgl. dies. Zbl. 11, 238), die beobachtete Schwerkraft nach oben auf eine 500 m über Meeresniveau verlaufende Niveaulfläche mittels einer Entwicklung in eine Taylorsche Reihe zu reduzieren. Diese Entwicklung konvergiert nur im Falle von tiefliegenden Störungsmassen, und es läßt sich zeigen, daß die Anwendung des Integrals von Poisson für eine kugelförmige Erde die Schwerkraft und deren Vertikalgradient für einen beliebigen äußeren Punkt viel genauer ergibt. Daraus folgt für die Reduktion die bessere Formel  $\Delta g_z = \frac{z}{2\pi} \iint \Delta g r^{-3} d\sigma$ , welche auch Numerov angibt. Es wird die praktische Anwendungsmöglichkeit dieser Formel besprochen, welche wohl außer Pendelbeobachtungen noch Drehwagenmessungen erfordern wird, wenigstens bei Reduktion auf die von Numerov vorgeschlagene Höhe. Bei einer Höhe von 10000 m könnte man mit Pendelbeobachtungen allein auskommen, dagegen tauchen aber andere Schwierigkeiten auf. Die Lotabweichungen können auch mittels ähnlicher Formeln auf eine höherliegende Niveaulfläche übertragen werden. Verf. bezweifelt aber, ob diese Methode in praktischer Hinsicht dem üblichen Verfahren mit Reduktion der Schwerkraft aufs Meeresniveau nach der Kondensationsmethode Vorzüge aufweist.

*A. Michailov (Moskau).*

**Gorchkov, G. P.: On isogravitational surfaces.** Bull. géodés. Nr 43, 119—126 (1934).

Es sei  $f = \partial V / \partial n$  die Anziehungskraft, welche dem Newtonschen Potential  $V$  entspricht. Die Gleichung  $f = \text{konst.}$  bestimmt eine Flächenschar, deren Normalen mit der Richtung des vollen Kraftgradienten  $\partial f / \partial n$  zusammenfallen. Der Winkel  $\theta$  zwischen diesen Normalen und denjenigen der Flächen  $V = \text{konst.}$  wird durch die Gleichung  $\cos \theta = \partial^2 V / \partial z^2 [(\partial^2 V / \partial x \partial z)^2 + (\partial^2 V / \partial y \partial z)^2 + (\partial^2 V / \partial z^2)^2]^{-\frac{1}{2}}$  bestimmt. Die Anwendung auf das normale Schwerfeld der Erde ergibt für die Fläche  $g = \text{konst.}$  = Normalschwere am Äquator ein Sphäroid von der Abplattung 1/1418,1, welches das Erdsphäroid am Äquator berührt. Die Flächenschar  $g = \text{konst.}$  ergibt im Schnitt mit dem Erdsphäroid eine Schar von Isogammen, welche Eigenschaft diese Flächen zur Interpretation von Drehwagenbeobachtungen geeignet macht.

*A. Michailov (Moskau).*

**Koridalin, E., und S. Masarskij: Über die seismische Prospektion nach der Methode der reflektierten Wellen.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 121—124 (1935).

**Graaff Hunter, J. de: The figure of the earth from gravity observations and the precision obtainable.** Philos. Trans. Roy. Soc. London A 234, 377—431 (1935).

Von den Greenschen Sätzen ausgehend, wird das Potential  $V$  der Schwerkraft für einen äußeren Aufpunkt durch die Schwere am Geoid ausgedrückt, unabhängig von der inneren Verteilung der anziehenden Massen. Das Geoid wird dabei isostatisch kompensiert angenommen, d. h. die äußeren Massen werden ins Innere verlegt. Der Radiusvektor des Geoids vom



Massenzentrum gezogen, drückt sich so aus:  $r = a(1 + u) = a(1 - 2/3 \varepsilon P_2 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n)$  mit  $P_2 = \frac{1}{2}(3\cos\theta - 1)$ , durch  $u$  ist eine Entwicklung nach sphärischen Funktionen angedeutet.

Dementsprechend ist die Schwerkraft am Geoid  $g = G(1 + v) = G[1 + \alpha P_2 + \beta P_4 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) u_n]$ .

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichung für  $V$  erfolgt nach längeren Entwicklungen eine Gleichung für die äußeren Niveauflächen, welche es erlaubt, die Schwerkraft auf denselben zu ermitteln. Bei Vernachlässigen von Größen zweiter Ordnung wird noch der vertikale Schwerkraftgradient und somit die Freiluftreduktion auf das Geoid erhalten. Nun wird gesetzt  $r = R + \Delta r$  und  $g = \gamma + \Delta g$ , wo  $R$  und  $\gamma$  einem Rotationsellipsoid entsprechen. Die Relation zwischen  $\Delta r$  und  $\Delta g$  wird durch die bekannte Formel von Stokes gegeben. Für  $\gamma$  wird eine Formel erhalten, welche nach Einsetzen entsprechender numerischer Werte die internationale Formel von Cassinis für die normale Schwerkraft ergibt. Aus der Formel für  $\Delta r$  wird die Neigung der Geoidfläche gegen ein Referenzsphäroid abgeleitet, wobei für die Lotabweichungen  $\xi$  und  $\eta$  die Formeln von Vening Meinesz erhalten werden. Da in den letzten für den Aufpunkt selbst die unter dem Integralzeichen stehende Funktion unendlich wird, so werden die Formeln von Vening Meinesz transformiert, indem statt  $\Delta g$  die horizontalen Schwerkraftgradienten eingeführt werden, wodurch die Quadratur für die nächste Umgebung des Aufpunktes ermöglicht wird. — Es wird ausführlich untersucht, welche Genauigkeit man erzielen kann bei einer praktischen Anwendung der Formeln von Stokes und Vening Meinesz, indem die betreffenden Integrale durch graphische oder numerische Quadraturen auf Grund einer gravimetrischen Aufnahme von gegebener Dichteverteilung der Stationen ausgewertet werden. Das Netz der Stationen wird dabei bestehend aus a) allgemeinen Stationen, welche die ganze Erdkugel mit gleichförmiger Dichte bedecken, und b) lokalen Zusatzstationen in der Umgegend des zu untersuchenden Punktes angenommen. Die Verteilung der Schwereanomalien wird eine dem Gaußschen Fehlergesetz entsprechende angenommen, dessen Genauigkeitsmaß aus 104 Schwerestationen in Indien bestimmt wird. Es ergibt sich, daß eine Schwerestation die mittlere Anomalie eines Rechtecks von  $A$  km Länge und  $B$  km Breite mit einem wahrscheinlichen Repräsentationsfehler von  $\pm 0,37 (A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}})$  Milligal darstellt. Dazu müssen noch die Beobachtungs- und Reduktionsfehler mitgerechnet werden. Die Stationen a) werden schließlich von der Dichte 1 Station auf  $5^\circ \times 5^\circ = (555)^2 \text{ km}^2$  angenommen, was für die ganze Erde 1654 Stationen erfordert. Dieses Netz allein reicht aus, um  $\Delta r$  mit einem w.F. von  $\pm 10,4 \text{ m}$  zu bestimmen. Die Zugabe von 84 zweckmäßig verteilten Lokalstationen der Gruppe b) verkleinert diesen Fehler bis auf  $\pm 7,0 \text{ m}$ . Die Genauigkeit der Bestimmung von Lotabweichungen hängt im wesentlichen von den Nachbarstationen ab, welche hauptsächlich der Gruppe b) zufallen. Es werden deshalb 76—165 solche Zusatzstationen berücksichtigt, welche innerhalb eines Kreises vom sphärischen Radius  $\psi = 20^\circ$  verteilt sind. Der von dieser Zone stammende w.F. in  $\xi$  und  $\eta$  beträgt  $\pm 0'',208$  bis  $\pm 0'',288$ . Die übrige Erdoberfläche mit  $\psi > 20^\circ$  von Stationen a) gleichmäßig bedeckt, erzeugt in den Lotabweichungen einen w.F. von  $\pm 0'',188$ . Insgesamt beträgt der w.F. von  $\xi$  und  $\eta$  bei 1654 allgemeinen Stationen und 84 Lokalstationen  $\pm 0'',35$ ; beschränkt man sich in den allgemeinen Stationen mit  $\psi \leq 60^\circ$ , so wächst dieser Fehler bis auf  $\pm 0'',67$  und bei  $\psi \leq 20^\circ$  bis auf  $\pm 1'',26$ .

A. Michailow (Moskau).

Gutenberg, B., and C. F. Richter: On seismic waves. II. Gerlands Beitr. Geophys. 45, 280—360 (1935).

Compton, Arthur H., and Ivan A. Gettling: An apparent effect of galactic rotation on the intensity of cosmic rays. Physic. Rev., II. s. 47, 817—821 (1935).

Bewegt sich die Erde gleichförmig im Raum, so muß unter der Annahme einer isotropen Korpusskularstrahlung die Intensität der Höhenstrahlung an der „Vorderseite“ der Erde (in Richtung der Bewegung) größer sein als an der Rückseite. Verff. schätzen diesen Effekt ab und vergleichen ihn mit der tatsächlich gefundenen sternzeitlichen Variation der Höhenstrahlintensität. Die hieraus bestimmte Bewegung stimmt mit derjenigen überein, die aus astronomischen Schätzungen der Sonnenbewegung infolge der Rotation des Milchstraßensystems abgeleitet wurde. Sollte sich dieses Resultat nach genaueren Messungen bestätigen, so würde es auf einen außer-galaktischen Ursprung der Höhenstrahlen hinweisen. Nordheim (Lafayette).

Kropatschek, Friedrich: Die Mechanik der großen Zirkulation der Atmosphäre. Beitr. Physik frei. Atmosph. 22, 272—298 (1935).

Die Behandlung des Problems vollzieht sich mit mancher nicht unbeträchtlichen Abweichung von den sonst in der theoretischen Meteorologie geübten Methoden.



Verf. setzt es sich zum Ziel, den Mechanismus der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre, also auch der meridionalen, aus den Eigenschaften der Luft als einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit abzuleiten. Zum Ausgleich für die infolge der Inkompressibilität vernachlässigten, in Wirklichkeit aber vorhandenen vertikalen Dichteunterschiede führt er eine dem einzelnen Flüssigkeitsteilchen aufgeprägte Kraft ein, die Auftriebskraft  $f$ . Die hydrodynamischen Grundgleichungen enthalten dann als Unbekannte nur noch: den Druck und die drei Geschwindigkeitskomponenten. Entgegen den bisherigen Anschauungen über die notwendigen Bedingungen der Erhaltung einer Meridionalzirkulation höherer Breiten (zonale Druckgradienten) setzt Verf., wie es in älteren Arbeiten geschah,  $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$ , und überträgt die Rolle derjenigen Kräfte, welche den Corioliskräften zur Erhaltung der Meridionalzirkulation entgegenwirken müssen, den durch den turbulenten Massenaustausch bei zonaler Bewegung erzeugten Scherkräften. Nach einigen Umformungen gelangt Verf. über die bekannten Gleichungen (statische Grundgleichung, Gradientwindgleichung, Kontinuitätsgleichung), zu denen noch eine Beziehung zwischen der meridionalen Geschwindigkeit und dem Austausch tritt, zu Lösungen, die er an einer Reihe von Beispielen überprüft, wobei sinngemäß  $f$  und  $A$  (Austauschkoeffizient) als bekannte Funktionen angesehen werden. Die für  $f$  erhaltene Gleichung entspricht der Margules'schen Beziehung zwischen vertikaler Windzunahme und horizontalen Temperaturgradienten. In konsequenter Durchführung des Grundgedankens werden für die reibende Bodenschicht gesonderte Ansätze (für  $p$  und  $v_x$ ) nach dem Siebentelgesetz der Prandtl'schen Grenzschichttheorie gegeben. Im letzten Beispiel gibt Verf. statt  $f$  die Verteilung der Vertikalgeschwindigkeit vor. Die Rechnung gibt dann die Lage der Roßbreiten, der zonalen und der auch in höheren Breiten geschlossenen meridionalen Zirkulation hinreichend gut wieder. Allerdings legen die Tatsache, daß eine geschlossene Zirkulation in höheren Breiten der Beobachtung widerspricht, und die für die Meridionalzirkulation sich ergebenden großen Austauschkoeffizienten doch die Auffassung wieder nahe, daß die Reibung an der Erhaltung der Meridionalzirkulation höherer Breiten zwar beteiligt ist, aber die zonalen Druckgradienten nicht ersetzen kann. Den Schluß bildet eine für die Passatzone notwendig gewordene Entwicklung der einzelnen Größen.

*H. Philipps* (Frankfurt a. M.).

**Hales, A. L.:** The thermal stability of the lower atmosphere. Proc. Roy. Soc. London A 151, 624—640 (1935).

In Anlehnung an Untersuchungen von Rayleigh und Jeffreys über die thermische Stabilität einer inkompressiblen Flüssigkeitsschicht, die an der Untergrenze erwärmt wird, werden hier dieselben Probleme für eine kompressible Flüssigkeit behandelt, und zwar für die untersten Atmosphärenschichten, wobei auf Anregung von Brunt  $\nu$  als der Koeffizient der inneren Reibung anzusehen ist. Zunächst wird eine Gleichung für die infolge der vorhandenen Turbulenz auftretende Wärmeleitung aufgestellt. Diese Gleichung wird zur Ableitung der Stabilitätsgleichung für eine kompressible Flüssigkeit benötigt, bei der sich der Wärmezufluß unten befindet. Die Lösung dieses Gleichungssystems zeigt, daß überadiabatische Zustände in begrenzten Schichten der Atmosphäre möglich sind.

*Hänsch* (Münster).

**Herrmann, Karl:** Flächenrechnung nach dem Ellingschen Verfahren im örtlichen Koordinatensystem. Allg. Vermessgs-Nachr. 47, 565—569 (1935).

**Brunn, A. v.:** Über die Berechnung der Kimmtiefe aus gegebenen meteorologischen Unterlagen auf Grund einer vollständigen Theorie der terrestrischen Refraktion. Z. Vermessgswes. 64, 673—685 (1935).